PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 11 — 1. Juni 1928 — Redaktionsschluß für Nr. 13 am 5. Juli 1928. — 29. Jahrgang

INHALT:

Zusammenfassende Berichte:

G. Wentzel, Die unperiodischen Vorgänge in der Wellenmechanik. S. 321.

Originalmitteilungen:

H. Ewest u. A. Rüttenauer, Beobachtungen beim Übergange des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen. S. 337.

L. Schiller u. Th. Burbach, Wärmeübergang strömender Flüssigkeit in Rohren. S. 340.

J. Zenneck, Demonstration des Doppler-Effekts in der Akustik. S. 343.

J. Zenneck, Zur Abbildung bei der Projektion von Diapositiven. S. 345.

J. Zenneck, Zur Demonstration gekrümmter Lichtstrahlen. S. 346.

H. Dember, Über eine einfache Vorrichtung zur Messung hoher elektrischer Potentiale. S. 347.

Besprechungen:

P. Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker. S. 348.

E. Gehrcke, Handbuch der physikalischen Optik. S. 349.

A. S. Eddington, Der innere Aufbau der Sterne. S. 350.

Astronomischer Kalender. 47. Jahrg. S. 351.

E. Schmidt, Wärmestrahlung technischer Oberflächen bei gewöhnlicher Temperatur. S. 351.

P. Bommersheim, „Beiträge zur Lehre von Ding und Gesetz". S. 351.

Tagesereignisse. S. 352.

Personalien. S. 352.

ZUSAMMENFASSENDE BERICHTE.

Besorgt von R. Seeliger.

Die unperiodischen Vorgänge in der Wellenmechanik.

Von Gregor Wentzel.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

I. Abschnitt: Allgemeine Ansätze der Wellenmechanik.
§ 1. Dichte, Stromdichte und Geschwindigkeit der Elektronen.
§ 2. Das freie Elektron.
§ 3. Abgeschlossene Systeme.

II. Abschnitt: Borns Theorie des Elektronenstoßes.
§ 1. Störungsrechnung.
§ 2. Diskussion.
§ 3. Anwendung auf das H-Atom.

III. Abschnitt: Methode der Variation der Konstanten.
§ 1. Allgemeine Theorie.
§ 2. Der Photoeffekt.
§ 3. Strahlungslose Sprünge (Auger-Effekt).
§ 4. Elektronenstoß.

Schlußbemerkungen.

Einleitung.

In der alten Quantentheorie wurden bekanntlich die Energie- bzw. Frequenzprobleme mit Hilfe des $h\nu$-Prinzips und der Quantenbedingungen, die Intensitätsprobleme mit Hilfe des Korrespondenzprinzips behandelt. Die Aussagen des letzteren waren ihrer Natur nach unscharf, und dies machte sich besonders in der Theorie der kontinuierlichen Spektren bzw. der unperiodischen Vorgänge störend geltend, da es sich ja bei diesen lediglich um Intensitätsfragen handelt. Infolgedessen konnten die älteren Versuche zur korrespondenzmäßigen Behandlung solcher Probleme wie des Photoeffekts (H. A. Kramers[1]) und des Elektronenstoßes (E. Fermi[2]) naturgemäß keine eindeutigen und befriedigenden Lösungen geben. Die Quantenmechanik, die eine scharfe Formulierung des Bohrschen Korrespondenzprinzips mit sich gebracht hat, hat hier Abhilfe geschaffen, und während sie bezüglich der periodischen Vorgänge (der abgeschlossenen Systeme) nur eine Verbesserung und Vervollständigung der Bohr-Sommerfeldschen Theorie bedeutet, kann man sagen, daß die Theorie der unperiodischen Vorgänge durch die neue Quantenmechanik überhaupt erst möglich gemacht worden ist. Und zwar erweist sich die Quantenmechanik in diesen Problemen bei weitem am einfachsten anwendbar in der Gestalt der de Broglie-Schrödingerschen Wellenmechanik. M. Born hat in seiner Theorie des Elektronenstoßes [3] als erster die Wellenmechanik zur Behandlung unperiodischer

Vorgänge nutzbar gemacht; dabei hat er darauf hingewiesen, daß in diesen Problemen die statistische Interpretation der de Broglie-Schrödingerschen Wellen unerläßlich ist. Die Grundlagen der Bornschen Theorie sind im II. Abschnitt des folgenden Berichtes dargestellt. Eine allgemeinere Behandlung unperiodischer Vorgänge gestattet die Methode der Variation der Konstanten, die mit ihren wichtigsten Anwendungen den III. Abschnitt ausmacht. Es sei noch hervorgehoben, daß wir hier nur Quantenmechanik treiben, also alle diejenigen Probleme beiseite lassen, die ihrem Wesen nach zur Quantenelektrodynamik gehören, wie Emission und Zerstreuung von Licht. Auf diesen Punkt kommen wir in den Schlußbemerkungen zurück.

I. Abschnitt.

Allgemeine Ansätze der Wellenmechanik.

§ 1. Dichte, Stromdichte und Geschwindigkeit der Elektronen (4).

Voranstellen müssen wir zunächst einige einfache Ansätze der allgemeinen Wellenmechanik. Bezüglich ihrer näheren Begründung verweisen wir auf einen zusammenfassenden Bericht von C. Eckart und H. Hönl, der bald in dieser Zeitschrift erscheinen wird.

Für ein mechanisches System von N Elektronen $x_s y_s z_s (s = 1 \ldots N)$, in welchem die Kräfte durch eine Potentialfunktion $U = U(x_1 \ldots z_N)$ darstellbar sind, lautet bekanntlich die Schrödingersche Wellengleichung unter Vernachlässigung der Relativitätskorrektion und des Elektronenmagnetismus:

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h}{2\pi i}\right)^2 \Delta\psi + U\psi$$
$$\Delta = \sum_s \Delta_s, \quad \Delta_s = \frac{\partial^2}{\partial x_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_s^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_s^2}. \tag{1}$$

In die potentielle Energie U ist hier auch die Ruhenergie der Elektronen ($N \cdot mc^2$) mit aufzunehmen. Bei beliebigen Kräften hat man zu schreiben:

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = H[\psi], \tag{1a}$$

wo $H[\ ]$ ein Differentialoperator zweiter Ordnung ist, den man dadurch erhält, daß man in der klassischen Hamiltonschen Funktion H des Systems p_x, p_y, p_z bzw. durch $\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial z}$ ersetzt.

Die physikalische Bedeutung der Wellenfunktion ψ besteht darin, daß

$$\varrho = \psi\psi^* = |\psi|^2 \tag{2}$$

als Elektronendichte und

$$\mathfrak{i} = \frac{h}{4\pi i m}(\psi \operatorname{grad}\psi^* - \psi^* \operatorname{grad}\psi) \tag{3}$$

als Elektronenstromdichte (zunächst im abstrakten $3N$-dimensionalen Raum der Lagenkoordinaten) angesprochen werden kann (4). Die Berechtigung hierzu ergibt sich aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{i} = 0, \tag{4}$$

die man aus der Wellengleichung (1) herleitet, indem man sie mit ψ^* multipliziert und das konjugiert Komplexe subtrahiert. Dabei deuten wir ϱ und $\mathfrak{i}$ statistisch: $\varrho \cdot d\tau$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System zur Zeit t im Element $d\tau$ des $3N$-dimensionalen Lagenkoordinatenraumes angetroffen wird; $\mathfrak{i}_n \cdot d\sigma dt$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System in der Zeit dt durch das $(3N-1)$ dimensionale Flächenelement $d\sigma$ hindurchgeht. Aus der Bedeutung von ϱ ergibt sich ohne weiteres die „Normierungsbedingung" für die Wellenfunktion ψ:

$$\int \varrho\, d\tau = \int \psi\psi^*\, d\tau = 1. \tag{5}$$

Nach Schrödinger (4) kann man aber auch dem einzelnen Elektron (s) im 3-dimensionalen Raum eine Dichte ϱ_s und eine Stromdichte $\mathfrak{i}_s$ zuordnen durch die $3(N-1)$-fachen Integrale ($d\tau_s = dx_s\, dy_s\, dz_s$, $d\tau = d\tau_1 \cdot d\tau_2 \cdot \ldots \cdot d\tau_N$):

$$\varrho_s = \int\cdots\int d\tau_1 \cdots d\tau_{s-1} \cdot d\tau_{s+1} \cdots d\tau_N \cdot \psi\psi^* \tag{6}$$

$$\mathfrak{i}_s = \int\cdots\int d\tau_1 \cdots d\tau_{s-1} \cdot d\tau_{s+1} \cdots d\tau_N \cdot \frac{h}{4\pi i m}(\psi \operatorname{grad}_s \psi^* - \psi^* \operatorname{grad}_s \psi). \tag{7}$$

Multipliziert man nämlich Gl. (4) mit $d\tau_1 \dots d\tau_{s-1} \cdot d\tau_{s+1} \dots d\tau_N$ und integriert, so folgt mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und selbstverständlicher Randbedingungen die Kontinuitätsgleichung für die „Strömung" des $s$ten Elektrons in seinem Raum $x_s y_s z_s$:

$$\frac{\partial \varrho_s}{\partial t} + \operatorname{div}_s \mathfrak{i}_s = 0. \tag{8}$$

Die Dichte ϱ_s hängt natürlich von $x_s y_s z_s$ allein ab; wir deuten $\varrho_s d\tau_s$ als Wahrscheinlichkeit dafür, daß das $s$te Elektron zur Zeit t im Element $d\tau_s = dx_s dy_s dz_s$ des (wirklichen) 3-dimensionalen Raumes angetroffen wird; entsprechend $\mathfrak{i}_s$. In der Tat ist nach (5) und (6)

$$\int \varrho_s d\tau_s = 1. \tag{9}$$

Ist $\mathfrak{v}_s$ das Geschwindigkeitsfeld der Strömung des $s$ten Elektrons, so ist offenbar

$$\mathfrak{i}_s = \varrho_s \cdot \mathfrak{v}_s. \tag{10}$$

Diese Gleichung, in Verbindung mit (6) und (7), definiert also die Geschwindigkeit, mit der das $s$te Elektron gegebenenfalls den Punkt $x_s y_s z_s$ passiert. Ist nur 1 Elektron vorhanden ($N = 1$), so wird dessen Geschwindigkeit

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{i}}{\varrho} &= \frac{h}{4\pi i m}\left(\frac{\operatorname{grad}\psi^*}{\psi^*} - \frac{\operatorname{grad}\psi}{\psi}\right) \\ &= -\frac{h}{2\pi m}\,\Im\mathrm{m}\{\operatorname{grad}\log\psi\}. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Bekanntlich verhält sich die Wellenmechanik zur klassischen Mechanik ähnlich wie die Wellenoptik zur Strahlenoptik. Soweit ϱ, $\mathfrak{i}_x$, $\mathfrak{i}_y$, $\mathfrak{i}_z$ langsam veränderliche Ortsfunktionen sind, geht die Wellenmechanik asymptotisch in die klassische Mechanik über; die Wellengleichung (1) bzw. (1a) wird zur Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung für die Wirkungsfunktion

$$S = -\frac{h}{2\pi i}\log\psi;$$

und nach (11) wird

$$m\,\mathfrak{v} = \operatorname{grad} S,$$

d. h. die Elektronenbahnen fallen in die Orthogonaltrajektorien der Flächenschar $S = \text{const}$, wie es sein muß. An den Stellen aber, wo ϱ, $\mathfrak{i}_x$, $\mathfrak{i}_y$, $\mathfrak{i}_z$ schnell veränderlich sind, treten merkliche Abweichungen von der klassischen Mechanik auf, die Beugungserscheinungen der Materie. Ebenso wie in der Optik kann man diese dadurch erzeugen, daß man Hindernisse in den Strahlenweg stellt (z. B. Spaltinterferenzen). Im Bereich dieser Beugungserscheinungen hat es keinen Sinn, einem einzelnen Elektron eine bestimmte Bahn zuzuordnen, ebensowenig wie einem Lichtquant in optischen Beugungserscheinungen. Deshalb hat auch die Definition der Elektronengeschwindigkeit durch Gl. (10) oder (11) nur einen Sinn im Gültigkeitsbereich der klassischen Mechanik.

§ 2. Das freie Elektron.

Hat man es mit einem Elektron ($N = 1$) zu tun, auf das keine äußeren Kräfte wirken, so bleibt in der Wellengleichung für die potentielle Energie U nur die innere Energie $U = mc^2$ stehen. Ein partikuläres Integral der so erhaltenen Differentialgleichung ist die de Broglie sche ebene Welle (5)

$$\psi = a \cdot e^{-ikx + i\omega t} \tag{12}$$

$$k = \frac{2\pi}{h}\sqrt{2mT},\quad \omega = \frac{2\pi}{h}(mc^2 + T). \tag{13}$$

Dieselbe entspricht einem homogenen parallelen Kathodenstrahl von der kinetischen Energie T; in der Tat ist nach (2), (3) und (10) oder (11):

$$\left.\begin{aligned} &\varrho = |a|^2,\ \mathfrak{i}_x = \frac{hk}{2\pi m}|a|^2,\ \mathfrak{i}_y = \mathfrak{i}_z = 0 \\ &\mathfrak{v}_x = \frac{hk}{2\pi m} = \sqrt{\frac{2T}{m}},\ \mathfrak{v}_y = \mathfrak{v}_z = 0 \\ &\frac{m}{2}|\mathfrak{v}|^2 = \frac{1}{2m}\left(\frac{hk}{2\pi}\right)^2 = T. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Ein anderes partikuläres Integral (für $U = mc^2$) ist die Kugelwelle

$$\psi = a \cdot \frac{e^{-ikr + i\omega t}}{r}, \tag{15}$$

welche einem Strom von Elektronen entspricht, die von einem Zentrum nach allen Seiten auseinanderlaufen.

In der „monochromatischen" Welle (12) ist die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ scharf definiert, der Ort eines Elektrons dagegen völlig undefiniert (wegen $\varrho = \text{const}$). Beschränkt man den Ort des Elektrons etwa auf ein Intervall Δx, so braucht man „abgeschnittene" Wellenzüge, die (nach Ausweis ihrer Fourierzerlegung) nicht mehr monochromatisch sind; die „Verbreiterung der Spektrallinie" ist von der Größenordnung $\Delta k \approx \frac{1}{\Delta x}$, was nach (14) der Heisenbergschen „Ungenauigkeitsrelation"

$$m \cdot \Delta \mathfrak{v}_x \cdot \Delta x \approx h$$

entspricht. Beschränkt man andererseits den Ort des Elektrons auf ein Intervall Δy senkrecht zur Bewegungsrichtung (etwa durch einen Schirm mit Spalt), so entsteht durch Beugung des Kathodenstrahls eine y-Komponente der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, wiederum in Übereinstimmung mit der „Ungenauigkeitsrelation":

$$m \cdot \Delta \mathfrak{v}_y \cdot \Delta y \approx h$$

(Bohr). In diesen Fällen hat man es also mit „Wellenpaketen" oder „Wellengruppen" zu tun. Bemerkenswert ist der schon von de Broglie [5] hervorgehobene Umstand, daß die Gruppengeschwindigkeit dieser Wellengruppen mit der Elektronengeschwindigkeit $\mathfrak{v}$ übereinstimmt; in der Tat folgt aus (13), (14):

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dT} \Big/ \frac{dk}{dT} = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \mathfrak{v}_x.$$

Dies ist in Anbetracht der Bedeutung von $|\psi|^2$ anschaulich evident.

§ 3. Abgeschlossene Systeme [4].

Man pflegt auch hier — wie in (12) und (15) — ψ als rein periodisch in der Zeit anzusetzen:

$$\psi = e^{i\omega t} \cdot u(x_1 \cdots z_N), \quad \omega = \frac{2\pi}{h}(N \cdot mc^2 + W). \tag{16}$$

Dann nimmt die Wellengleichung (1) die Form an:

$$\Delta u + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V)u = 0; \tag{17}$$

hier ist V die gewöhnliche potentielle Energie — ohne Ruhenergie —:

$$U = V + N \cdot mc^2 \tag{18}$$

Hinzukommt bei abgeschlossenen Systemen die Randbedingung, daß die Elektronendichte $\varrho = |\psi|^2$ im Unendlichen verschwinden soll. Zusammen mit dieser Randbedingung stellt die Differentialgleichung (17) bekanntlich ein Eigenwertproblem dar; das Problem ist nur lösbar für bestimmte Werte des Energieparameters W. Verschwindet die potentielle Energie V im Unendlichen, so hat man stets eine diskrete und eine kontinuierliche Mannigfaltigkeit von Eigenwerten (W_n bzw. W); die ersteren (W_n) entsprechen den gequantelten periodischen Lösungen der alten Quantentheorie (z. B. Ellipsenbahnen), die letzteren (W) den unperiodischen Lösungen (z. B. Hyperbelbahnen). Die entsprechenden Lösungen u der Differentialgleichung, die sog. Eigenfunktionen, verhalten sich im Unendlichen in beiden Fällen ganz verschieden: die den diskreten Eigenwerten W_n entsprechenden Eigenfunktionen u_n verschwinden exponentiell, während die zum kontinuierlichen Spektrum W gehörenden u_W sich asymptotisch wie Kugelwellen $\frac{\cos(kr - \alpha)}{r}$ verhalten, wo k durch (13) gegeben ist; die Analogie mit den korrespondierenden klassischen Lösungen ist hier nicht zu verkennen. Dementsprechend muß auch die „Normierung" der beiden Typen von Eigenfunktionen in verschiedener Weise erfolgen. Für die diskreten Eigenfunktionen u_n bestimmt man den konstanten Faktor in u_n zweckmäßigerweise durch die Gleichung:

$$\int d\tau\, u_n^2 = 1. \tag{19}$$

Die kontinuierlichen Eigenfunktionen u_W dagegen normiert man pro Energieintervall ΔW (6):

$$\lim_{\Delta W = 0} \frac{1}{\Delta W} \int d\tau \left| \int_{W}^{W+\Delta W} dW u_W \right|^2 = 1 . \tag{20}$$

Außer diesen Normierungsrelationen brauchen wir im folgenden hauptsächlich die sog. „Orthogonalitätsrelationen“:

$$\left.\begin{aligned} &\int d\tau u_n u_m = 0 \text{ für } W_n \neq W_m , \\ &\int d\tau u_n u_W = 0 \\ &\int d\tau u_{W'} u_{W''} = 0 \text{ für } W' \neq W'' . \end{aligned}\right| \tag{21}$$

Man leitet sie dadurch ab, daß man die Differentialgleichung der Eigenfunktion u_n bzw. $u_{W'}$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u_n + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W_n - V) u_n = 0 \\ &\Delta u_{W'} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W' - V) u_{W'} = 0 \end{aligned}\right| \tag{22}$$

mit $u_m d\tau$ oder mit $u_{W''} d\tau$ multipliziert und integriert, dann die durch Vertauschung der Indizes erhaltene Gleichung abzieht und den Greenschen Satz anwendet.

Ist ein Eigenwert entartet, d. h. gehören zu einem Eigenwert W_n oder W mehrere Eigenfunktionen, so sind die letzteren zunächst nicht notwendig orthogonal aufeinander; doch kann man dies immer durch lineare Transformationen der betreffenden Eigenfunktionen erzielen. Dies sei im folgenden stets als geschehen vorausgesetzt, so daß wir statt (21) schreiben können:

$$\int d\tau u_n u_m = 0 \text{ für } n \neq m , \tag{23}$$

gleich ob $W_n \neq W_m$ oder $W_n = W_m$.

Die Eigenfunktionen u_n, u_W bilden ein „vollständiges orthogonales Funktionensystem“, nach dem man eine beliebige Funktion $f(x_1 \ldots z_N)$ entwickeln kann:

$$f = \sum_n f_n u_n + \int_{\Delta W} dW f_W u_W .$$

Die Entwicklungskoeffizienten f_n bzw. f_W findet man dadurch, daß man vorstehende Gleichung mit $u_m d\tau$ bzw. mit $\int_{\Delta W} dW u_{W'} \cdot d\tau$ multipliziert und integriert. Mit Hilfe der Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen (19) bis (23) folgt dann:

$$f_m = \int d\tau \cdot f u_m$$

$$f_W = \int d\tau \cdot f u_W .$$

Damit ist die Sammlung von Formeln abgeschlossen, die wir im folgenden zu verwenden haben werden.

II. Abschnitt.

Borns Theorie des Elektronenstoßes (3).

§ 1. Störungsrechnung.

Es soll jetzt die Wechselwirkung eines Atomsystems (N Elektronen $x_s y_s z_s$, $s = 1 \ldots N$), dessen Eigenwerte und Eigenfunktionen als bekannt vorausgesetzt sind, mit einem Kathodenstrahl, d. h. mit einer de Broglie-Welle (12) untersucht werden. Die Koordinaten des Kathodenstrahlelektrons seien mit $x_0 y_0 z_0$ bezeichnet.

In der Theorie von Born wird die Zeit t von vornherein durch den Ansatz (16) eliminiert, d. h. das Problem wird auf Grund der Differentialgleichung (17) behandelt, wo aber jetzt natürlich u von $3(N+1)$ Koordinaten $(x_0 y_0 z_0 x_1 \ldots z_N)$ abhängt und Δ die Summe von $(N+1)$ Δ_s-Operatoren bedeutet ($s = 0, 1 \ldots N$):

$$\sum_{s=0}^{N} \Delta_s u + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (W - V) u = 0 . \tag{24}$$

Die Randbedingung sagt aus, daß u sich im Unendlichen bezüglich der Koordinaten $x_0 y_0 x_0$ wie eine ebene de Broglie-Welle (12), bezüglich der Koordinaten $x_1 \ldots z_N$ wie ein abgeschlossenes System verhalten soll.

Die potentielle Energie V läßt sich aufspalten in die innere potentielle Energie V^0 des Atoms und die Wechselwirkungsenergie V^1 zwischen Kathodenstrahlelektron und Atom:

$$V = V^0(x_1 \cdots z_N) + V^1(x_0 \cdots x_1 \cdots z_N). \tag{25}$$

Born löst nun das Problem durch eine Störungsrechnung, die davon ausgeht, daß V^1 als klein gegen V^0 betrachtet werden kann. Vernachlässigt man nämlich zunächst V^1, so konstruiert man leicht eine Lösung, die den oben genannten Randbedingungen genügt:

$$u^0 = a\, e^{-ikx_0} u_n(x_1 \cdots z_N). \tag{26}$$

Hier bedeutet u_n die Eigenschwingung, in der sich das Atom anfänglich (zu Beginn der Kathodenstrahlbeschießung) befindet, d. h. im allgemeinen die dem Grundzustand entsprechende Eigenfunktion; ist W_n der zugehörige Eigenwert des Atoms, so gilt definitionsgemäß:

$$\sum_{s=1}^{N} \Delta_s u_n + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W_n - V^0)\, u_n = 0. \tag{27}$$

In nullter Näherung ($V^1 = 0$) wird Gl. (24) durch den Ansatz (26), (27) befriedigt, sofern

$$W = W_n + T, \quad T = \frac{1}{2m}\left(\frac{hk}{2\pi}\right)^2 \tag{28}$$

gesetzt wird; T bedeutet nach (13), (14) die kinetische Energie der Kathodenstrahlelektronen.

Setzt man nun:

$$u = u^0 + u^1 + u^2 + \cdots \tag{29}$$

und bestimmt u^1, u^2, ... sukzessive durch die Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\Delta u^0 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V^0)\, u^0 = 0 \\ &\Delta u^1 + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V^0)\, u^1 = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V^1 u^0 \\ &\cdots\cdots \\ &\Delta u^\alpha + \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - V^0)\, u^\alpha = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V^1 u^{\alpha-1} \\ &\cdots\cdots\cdots, \qquad \left(\Delta = \sum_{s=0}^{N}\right) \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

so ist die Differentialgleichung (24) befriedigt. Der Randbedingung ist Genüge getan, wenn u^1, u^2, ... sowohl bezüglich der Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ als auch bezüglich der Koordinaten $x_1 \ldots z_N$ im Unendlichen verschwinden. Die Konvergenz des Verfahrens läßt sich, wie Born angibt, beweisen unter der Voraussetzung, daß V^1 für große Entfernungen des äußeren Elektrons wie r_0^{-2} verschwindet; das ist bei neutralen Atomen der Fall. Bei ionisierten Atomen versagt die Bornsche Methode (schon die erste Näherung führt auf ein divergentes Integral); man muß dann auf eine im III. Abschnitt zu besprechende Methode zurückgreifen.

Die Differentialgleichungen (30) werden gelöst durch Entwicklung von u^α nach den Eigenfunktionen des Atoms $u_r(x_1 \ldots z_N)$, wobei die Entwicklungskoeffizienten natürlich noch von $x_0 y_0 z_0$ abhängen werden:

$$u^\alpha = \sum_r f_r^\alpha(x_0 y_0 z_0) \cdot u_r(x_1 \cdots z_N) + \int dW \cdot f_W^\alpha(x_0 y_0 z_0)\, u_W(x_1 \cdots z_N). \tag{31}$$

Setzt man dies in (30) ein und benutzt die Differentialgleichung (27) für die Eigenfunktionen u_r bzw. u_W, so folgt:

$$\sum_r u_r \cdot \left[\Delta_0 f_r^\alpha + k_{nr}^2 f_r^\alpha\right] + \int dW' \cdot u_{W'} \cdot \left[\Delta_0 f_{W'}^\alpha + k_{nW'}^2 f_{W'}^\alpha\right] = \frac{8\pi^2 m}{h^2} V^1 u^{\alpha-1}, \tag{32}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} k_{nr}^2 &= \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - W_r) = \frac{8\pi^2 m}{h^2}(T + W_n - W_r) \\ k_{nW'}^2 &= \frac{8\pi^2 m}{h^2}(W - W') = \frac{8\pi^2 m}{h^2}(T + W_n - W'). \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Multipliziert man Gl. (32) beiderseits mit $u_m d\tau_1 \dots d\tau_N$, bzw. mit $\int_W dW u_W \cdot d\tau_1 \dots d\tau_N$ und integriert über alle Atomkoordinaten, so ergibt sich in Anbetracht der Orthogonalitäts- und Normierungsrelationen (19) bis (23):

$$\left.\begin{aligned} \Delta_0 f^\alpha_m + k^2_{nm} f^\alpha_m &= \frac{8\pi^2 m}{h^2} \int\cdots\int d\tau_1 \cdots d\tau_N \cdot V^1 u^{\alpha-1} u_m = \Phi^\alpha_m (x_0 y_0 z_0) \\ \Delta_0 f^\alpha_W + k^2_{nW} f^\alpha_W &= \frac{8\pi^2 m}{h^2} \int\cdots\int d\tau_1 \cdots d\tau_N \cdot V^1 u^{\alpha-1} u_W = \Phi^\alpha_W (x_0 y_0 z_0) . \end{aligned}\right| \qquad (34)$$

Hier stehen rechterhand bekannte Funktionen von $x_0 y_0 z_0$; wir haben also für die Funktionen $f(x_0 y_0 z_0)$ Differentialgleichungen vom Typus der (z. B. aus der elektromagnetischen Lichttheorie bekannten) inhomogenen Wellengleichung. Die oben formulierte Randbedingung besagt, daß die Funktionen f im Unendlichen ($r_0 \approx \infty$) verschwinden sollen. Mit Rücksicht hierauf sind die Gleichungen (34) in bekannter Weise mit Hilfe des Greenschen Satzes zu integrieren; man erhält:

$$f^\alpha_m = -\frac{1}{4\pi} \int d\tau' \Phi^\alpha_m (x' y' z') \cdot \frac{e^{(\pm) i k_{nm} r' - r_0}}{r' - r_0} \qquad (35)$$

analog f^α_W. Damit ist unsere Aufgabe gelöst.

Wir wollen noch speziell die erste Näherung $\alpha = 1$ betrachten. Die in das Integral für Φ^1 (34) eingehende nullte Näherung u^0 ist durch Gl. (26) gegeben. Wir begnügen uns mit der asymptotischen Darstellung von f (35) für große $r_0 = \mathfrak{r}_0$, die hier allein interessiert; sie entspricht bekanntlich einer inhomogenen Kugelwelle (und zwar einer auslaufenden Kugelwelle, da die einlaufende keinen physikalischen Sinn hat). Mit (31) bekommen wir also für $k r_0 \gg 1$:

$$u^1 = \sum_m a_{nm} \frac{e^{-i k_{nm} r_0}}{r_0} \cdot u_m (x_1 \cdots z_N) + \int dW \cdot a_{nW} \frac{e^{-i k_{nW} r_0}}{r_0} \cdot u_W (x_1 \cdots z_N) \qquad (36)$$

$$\left.\begin{aligned} a_{nm} &= -a \cdot \frac{2\pi m}{h^2} \int d\tau\, V^1 e^{-i k x_n + i k_{nm} (\mathfrak{n} \mathfrak{r}_0)} \cdot u_n u_m \\ a_{nW} &= -a \cdot \frac{2\pi m}{h^2} \int d\tau\, V^1 e^{-i k x_n + i k_{nW} (\mathfrak{n} \mathfrak{r}_0)} \cdot u_n u_W . \end{aligned}\right| \qquad (37)$$

Hier ist die Integration über alle Koordinaten $x_0 y_0 z_0 x_1 \dots z_N$ zu erstrecken ($d\tau = d\tau_0 \cdot d\tau_1 \dots d\tau_N$), und $\mathfrak{n}$ bedeutet den (bei der Integration festzuhaltenden) Einheitsvektor der Wellennormalen (Komponenten $x_0/r_0, y_0/r_0, z_0/r_0$).

Für $u^2, u^3, \dots$ erhält man Formeln vom gleichen Typus wie (36), nur natürlich mit anderen Werten der Konstanten a. Die endgültige Lösung des Problems kann also nach (26) und (29) in der Form geschrieben werden:

$$u = a e^{-i k x_n} u_n + \sum_m c_{nm} \frac{e^{-i k_{nm} r_0}}{r_0} \cdot u_m + \int dW c_{nW} \frac{e^{-i k_{nW} r_0}}{r_0} \cdot u_W . \qquad (38)$$

§ 2. Diskussion.

Jedes Glied der Reihe $\sum_m$ in (38) bedeutet nach I, § 2 einen Strom von „gebeugten" Elektronen, die von dem Atom radial auslaufen, und zwar ist die kinetische Energie der dem Gliede m entsprechenden Elektronen nach (14) und (33):

$$T_{nm} = \frac{1}{2m} \left(\frac{h k_{nm}}{2\pi} \right)^2 = T - (W_m - W_n) . \qquad (39)$$

Die Elektronen $m = n$ sind elastisch reflektiert ($T_{nn} = T$), alle übrigen dagegen unelastisch; ihr Energieverlust ist gleich einer Eigenfrequenz des Atoms (mal h). Gleichzeitig tritt (nach Maßgabe derselben Koeffizienten c_{nm}) die Eigenschwingung u_m des Atoms auf, wodurch dieses zur Emission der Eigenfrequenzen

$$\nu_{mr} = \frac{W_m - W_r}{h} > 0$$

befähigt wird. Die Anregung des Atoms ist begrenzt durch die Bedingung

$$T_{nm} > 0 , \quad W_m - W_n < T ; \qquad (40)$$

denn nur diejenigen Glieder der Reihe in (38), die dieser Bedingung genügen, liefern richtige Kugelwellen von gestreuten Elektronen; die übrigen Glieder, für welche k_{nm} rein imaginär wird, stellen in r_0 exponentiell abklingende Schwingungen dar, die der Beobachtung nicht zugänglich sind.

Ist T hinreichend groß, so liefert auch das Integral in (38) Kugelwellen, entsprechend unelastisch reflektierten Elektronen von der kinetischen Energie

$$T_{nW} = \frac{1}{2m}\left(\frac{h k_{nW}}{2\pi}\right)^2 = T - (W - W_n) > 0. \tag{41}$$

Gleichzeitig werden im Atom die Eigenschwingungen u_W des kontinuierlichen Spektrums angeregt; die letzteren entsprechen nach I, § 3 hyperbelartigen Bahnen, auf denen sich die Atomelektronen ins Unendliche entfernen; d. h. das Atom wird ionisiert.

Wie man sieht, sind all diese qualitativen Aussagen der Theorie im Einklang mit den bekannten Versuchsergebnissen von Franck und Hertz.

Die Ausbeute der elastischen und unelastischen Stöße, bzw. der Anregungs- und Ionisationsprozesse berechnen wir nach den Vorschriften von I, § 1. Wir beschränken uns dabei auf die erste Näherung der Bornschen Störungsrechnung, deren Ergebnis in den Formeln (36), (37) niedergelegt ist. Für die Stromdichte der gestreuten Elektronen $\dot{x}_0\, \dot{y}_0\, \dot{z}_0$ ist nach Formel (7) zu setzen

$$\dot{i}_0 = \frac{h}{4\pi i m}\int\cdots\int d\tau_1 \cdots d\tau_N \left(u^1 \frac{\partial u^{1*}}{\partial r_0} - u^{1*}\frac{\partial u^1}{\partial r_0}\right).$$

Setzt man hier (36) ein, so folgt, unter Berücksichtigung der Normierungs- und Orthogonalitätsrelationen, für $k r_0 \gg 1$:

$$|\dot{i}_0| = \frac{h}{2\pi m}\cdot\frac{1}{r_0^2}\left|\sum_{W_m < T + W_n} k_{nm}\, |a_{nm}|^2 + \int_{W < T + W_n} dW \cdot k_{nW}\, |a_{nW}|^2\right|. \tag{42}$$

Dies ist noch richtungsabhängig, da ja in die Formeln (37) für a_{nm} und a_{nW} noch die Wellennormale $\mathfrak{n}$ eingeht. Die Gesamtzahl der pro sec gestreuten Elektronen erhält man durch Integration über die Kugel vom Radius r_0 ($d\sigma = r_0^2\, d\Omega$); diese, durch die Stromdichte der Primärwelle $\frac{h k}{2\pi m}|a|^2$ — vgl. (14) — dividiert, stellt den „Wirkungsquerschnitt" q des Atoms für Elektronenstöße dar:

$$q = \sum_{W_m < T + W_n}^{m} \frac{k_{nm}}{k}\int d\Omega \left|\frac{a_{nm}}{a}\right|^2 + \int_{W < T + W_n} dW \cdot \frac{k_{nW}}{k}\cdot\int d\Omega \left|\frac{a_{nW}}{a}\right|^2. \tag{43}$$

Die Summe stellt den „anregenden", das Integral den „ionisierenden Querschnitt" dar; jedes Glied der Summe und jedes Element des Integrals gehört zu einer bestimmten Geschwindigkeit der gestreuten Elektronen.

§ 3. Anwendung auf das H-Atom.

Die Auswertung der Integrale (37) für die Größen a_{nm} ist bisher bloß für den Fall des H-Atoms ($N = 1$) mit Hilfe der Schrödingerschen Eigenfunktionen u_n durchgeführt, und zwar für den elastischen Stoß und die ersten unelastischen Stöße (2-quantige Bahnen) von Born (7) und allgemeiner von W. Elsasser (8). Für die Richtungsverteilung der gestreuten Kathodenstrahlen ergibt sich im Falle des elastischen Stoßes [Glied $m = n$ in (42)] die Rutherfordsche Verteilung, d. h. die gleiche Verteilung, wie man sie auf Grund der klassischen Mechanik aus der Statistik der Hyperbelbahnen erhält; sieht man von kleinsten Streuwinkeln ab, so ergibt sich für das Verhältnis der Stromdichten im gestreuten und primären Kathodenstrahl (9):

$$\frac{1}{r_0^2}\,\frac{e^4}{16\, T^2 \sin^2\frac{\Theta}{2}} \qquad (\Theta = \text{Streuwinkel}).$$

Für die unelastischen Stöße ergibt sich eine etwas weniger starke Abhängigkeit der Intensität vom Streuwinkel. Die Gesamtausbeute der elastischen Stöße (Glied $n = m$ in (43)) nimmt mit wachsender Primärenergie T monoton ab, und zwar für große T wie $1/T$. Die Ausbeute der anregenden Stöße dagegen steigt von der jeweiligen Anregungsgrenze $(W_m - W_n)$ aus mit wachsendem T an,

erreicht bei einem Vielfachen von $(W_m - W_n)$ ein Maximum und fällt darauf wieder monoton ab. Für sehr schnelle Teilchen gelingt es Elsasser (8), einen Zusammenhang zwischen seinen Formeln und der Bohrschen Formel für den mittleren Geschwindigkeitsverlust der α-Strahlen herzustellen (10).

Messungen der Ausbeute von Elektronenstößen liegen bisher nur an Atomen vor, deren Grundzustände zu wenig wasserstoffähnlich sind, als daß sie zu einer Prüfung der Formeln von Born und Elsasser herangezogen werden könnten. Außerdem muß betont werden, daß diese Formeln nur die erste Näherung der Bornschen Störungsrechnung darstellen, welche für kleine Kathodenstrahlgeschwindigkeiten sicher nicht ausreichend ist. Ein Versuch, die höheren Näherungen durchzurechnen, ist bisher noch nicht unternommen worden; insbesondere ist es noch nicht möglich gewesen, den Ramsauer-Effekt, d. i. die Wiederabnahme des Wirkungsquerschnittes bei kleinsten Geschwindigkeiten, theoretisch zu erfassen. Die verschiedenerseits unternommenen Versuche, diesen Effekt als Einkörperproblem [$N = 0$, Beugung der de Broglie-Welle in geeigneten statischen Zentralfeldern $V = V^1 = \Phi(r_0)$] zu behandeln (11), dürften dem Problem wohl kaum auf den Grund kommen, da beim Stoß langsamer Elektronen vermutlich gerade die Veränderung des Atoms durch den Kathodenstrahl eine entscheidende Rolle spielt.

III. Abschnitt.

Methode der Variation der Konstanten.

§ 1. Allgemeine Theorie (12).

Im Gegensatz zum vorigen Abschnitt werde jetzt die Zeitabhängigkeit der Wellenfunktionen ψ wieder mitgenommen; d. h. wir gehen wieder von der Wellengleichung (1), (1a), nicht von (17) aus.

Sei H^0 die Hamilton-Funktion eines abgeschlossenen (ungestörten) Systems, und seien $\psi_n = e^{i\omega_n t}\, u_n$, $\psi_W = e^{i\omega t}\, u_W$ die zugehörigen Eigenfunktionen:

$$\frac{h}{2\pi i}\cdot\frac{\partial \psi_n}{\partial t} = H^0[\psi_n], \qquad \frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi_W}{\partial t} = H^0[\psi_W]. \tag{44}$$

Dann kann der allgemeinste Zustand des Systems beschrieben werden durch

$$\psi = \sum_n a_n \psi_n + \int dW\, a_W \psi_W, \tag{45}$$

wo die a_n und a_W Konstante sind, die nur nach (5), (19) bis (23) der Normierungsrelation

$$\int |\psi|^2 d\tau = \sum_n |a_n|^2 + \int dW\, |a_W|^2 = 1 \tag{46}$$

genügen müssen. $|a_n|^2$ bzw. $dW\,|a_W|^2$ stellt die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß das System im $n$ten Zustand bzw. im Energiebereich dW angetroffen wird.

Läßt man nun von einem gewissen Zeitpunkt ($t = 0$) ab eine äußere Störung mit der Hamilton-Funktion H^1 auf das System wirken, so gilt Gl. (1a):

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial \psi}{\partial t} = H[\psi] = H^0[\psi] + H^1[\psi]. \tag{47}$$

Man kann jetzt die Wellengleichung immer noch formal durch den Ansatz (45) befriedigen, muß aber dann zulassen, daß die „Integrationskonstanten" a_n, a_W des ungestörten Problems mit der Zeit t langsam veränderlich werden, ähnlich wie in der astronomischen Störungstheorie. Setzt man (45) in (47) ein, so folgt unter Beachtung von (44):

$$\frac{h}{2\pi i}\left[\sum_n \frac{da_n}{dt}\psi_n + \int dW \cdot \frac{da_W}{dt}\psi_W\right] = H^1[\psi].$$

Multipliziert man hier beiderseits mit $\psi_m^*\, d\tau$ bzw. mit $\int_{\Delta W} dW \psi_W^* d\tau$ und integriert, so folgt mit (19) bis (23):

$$\left.\begin{aligned} \frac{h}{2\pi i}\frac{da_m}{dt} &= \int d\tau\, \psi_m^* H^1[\psi] \\ \frac{h}{2\pi i}\frac{da_W}{dt} &= \int d\tau\, \psi_W^* H^1[\psi]. \end{aligned}\right| \tag{48}$$

Oder indem man rechterhand ψ durch (45) ausdrückt:

$$\left.\begin{aligned}\frac{h}{2\pi i}\frac{da_m}{dt} &= \sum_k a_k H^1_{mk} + \int dW' a_{W'} H^1_{mW'},\\ \frac{h}{2\pi i}\frac{da_W}{dt} &= \sum_k a_k H^1_{Wk} + \int dW' a_{W'} H^1_{WW'},\end{aligned}\right| \tag{49}$$

wo

$$H^1_{\alpha\beta} = \int d\tau \psi^*_\alpha H^1 [\psi_\beta] \quad (\alpha,\beta = m, W). \tag{50}$$

(49) ist ein vollständiges System von linearen Differentialgleichungen für die a_n und a_W mit konstanten Koeffizienten, allerdings ein unendliches System.

Soll die statistische Bedeutung der Größen $|a_n|^2$, $dW|a_W|^2$ zu Recht bestehen, so muß die Relation (46) nach Einschaltung der Störung erhalten bleiben. Dies ist der Fall, wenn die Matrix der Störungsfunktion (50) „hermitisch" ist, d. h. wenn:

$$H^1_{\alpha\beta} = H^{1*}_{\beta\alpha}. \tag{51}$$

Diese Relation ist evident, wenn H^1 nur von den Lagenkoordinaten abhängt, also kein Differentialoperator, sondern lediglich eine (reelle) Funktion ist; sonst kann (und muß) der Störungsoperator $H^1[\ ]$ immer so „symmetrisiert" werden, daß (51) erfüllt ist. Aus (49) und (51) ersieht man dann aber leicht, daß die Summe

$$\frac{h}{2\pi i}\left[\sum_m a^*_m \frac{da_m}{dt} + \int dW a^*_W \frac{da_W}{dt}\right]$$

reell ist, und hieraus folgt:

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_m a^*_m a_m + \int dW a^*_W a_W\right] = 0,$$

was im Anschluß an (46) verlangt wurde.

Ein Verfahren, das Differentialgleichungssystem (49) zu lösen, besteht darin, daß man rechterhand für a_n und a_W zunächst die Werte einsetzt, die sie zu Beginn der Störung ($t = 0$) haben; dann liefert die Integration von (49) eine erste Näherung für die Zeitabhängigkeit von a_n und a_W. Setzt man dann rechts die Werte der ersten Näherung ein, so gibt (49) eine zweite Näherung, und so fort. Dieses Verfahren soll in den folgenden Beispielen durchgehend angewendet werden.

§ 2. Der Photoeffekt[13].

Wir untersuchen jetzt speziell die von einer linear polarisierten Lichtwelle

$$\mathfrak{E}_x = \mathfrak{E}_y = 0, \quad \mathfrak{E}_z = \frac{1}{2}\left\{E e^{2\pi i \nu\left(t-\frac{x}{c}\right)} + E^* e^{-2\pi i\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\} \tag{52}$$

in einem Atom hervorgerufene Störung. Hat man es mit 1 Elektron zu tun, so ist die klassische Störungsenergie $-e(\mathfrak{A}\mathfrak{v})$, wo $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential der Lichtwelle ist: $\mathfrak{E} = \dot{c}\mathfrak{A}\,|\,\dot{c}t$,

$$\mathfrak{A}_x = \mathfrak{A}_y = 0, \quad \mathfrak{A}_z = \frac{1}{4\pi i\nu}\left\{E e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)} - E^* e^{-2\pi i\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\}.$$

Um den Störungsoperator $H^1[\ ]$ zu erhalten, hat man nach I, § 1 den Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{v} = \mathfrak{p}/m$ durch den Operator $\left(\frac{h}{2\pi i m}\operatorname{grad}\right)$ zu ersetzen; folglich wird

$$H^1[\psi] = -\frac{eh}{2\pi i m}\mathfrak{A}_z\frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{eh}{8\pi^2 m\nu}\left\{E e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)} - E^* e^{-2\pi i\nu\left(t-\frac{x}{c}\right)}\right\}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Im Falle mehrerer Elektronen ist noch über alle Elektronen $s = 1 \ldots N$ zu summieren:

$$H^1[\psi] = \frac{eh}{8\pi^2 m\nu}\cdot\sum_s\left\{E e^{2\pi i\nu\left(t-\frac{x_s}{c}\right)} - E^* e^{-2\pi i\nu\left(t-\frac{x_s}{c}\right)}\right\}\frac{\partial\psi}{\partial z_s}. \tag{53}$$

Schließlich wird das Matrixelement der Störungsfunktion (50), wenn noch [vgl. (16)]:

$$\psi_\alpha = u_\alpha \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}\left(N m c^2 + W_\alpha\right) t} \tag{54}$$

gesetzt wird:

$$H^1_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta} e^{\frac{2\pi i}{h}(W_\beta - W_\alpha + h\nu)t} + \Phi^*_{\beta\alpha} e^{\frac{2\pi i}{h}(W_\beta - W_\alpha - h\nu)t}, \tag{55}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} \Phi_{\alpha\beta} &= + \frac{eh}{8\pi^2 m \nu} \cdot E \cdot \sum_s \int d\tau\, e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} x_s} u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial z_s} \\ \Phi^*_{\beta\alpha} &= - \frac{eh}{8\pi^2 m \nu} \cdot E^* \cdot \sum_s \int d\tau\, e^{+2\pi i \frac{\nu}{c} x_s} u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial z_s} \end{aligned}\right| \tag{56}$$

Daß das zweite Integral (56) aus dem ersten tatsächlich durch Vertauschung der Indizes und Übergang zum konjugiert Komplexen hervorgeht, beweist man leicht durch partielle Integration nach z_s. Infolgedessen erfüllt (55) auch die Bedingung (51); die Störungsmatrix ist in der Tat „hermitisch".

Wir gehen jetzt mit dem Ansatz (55) in die Differentialgleichungen (49) ein und integrieren in erster Näherung, indem wir rechterhand die Anfangswerte von a_m, a_W einsetzen. Nehmen wir an, daß sich das Atom zu Beginn der Beleuchtung ($t = 0$) im $n$ten Zustande befindet:

$$|a_n| = 1,\ a_k = 0\ (k \neq n),\ a_W = 0\ [\text{für } t = 0], \tag{57}$$

so ergibt (49):

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{da_m}{dt} = a_n H^1_{mn},\quad \frac{h}{2\pi i}\frac{da_W}{dt} = a_n H^1_{Wn}. \tag{58}$$

Integriert man mit Rücksicht auf die Anfangsbedingung (57), so folgt ($m \neq n$):

$$\left.\begin{aligned} a_m &= a_n \left\{ \Phi_{mn} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W_m + h\nu)t} - 1}{W_n - W_m + h\nu} + \Phi^*_{nm} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W_m - h\nu)t} - 1}{W_n - W_m - h\nu} \right\} \\ a_W &= a_n \left\{ \Phi_{Wn} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W + h\nu)t} - 1}{W_n - W + h\nu} + \Phi^*_{nW} \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W - h\nu)t} - 1}{W_n - W - h\nu} \right\}. \end{aligned}\right| \tag{59}$$

Hier treten die charakteristischen Resonanznenner auf, die aussagen, daß ein Zustand m besonders stark angeregt wird, wenn seine Energiedifferenz zum Grundzustand $|W_m - W_n|$ nahezu mit dem $h\nu$ der Primärwelle übereinstimmt. Jedoch bleiben a_m und a_W auch im Falle exakter Resonanz endlich.

Damit sind die Koeffizienten der Eigenfunktionenentwicklung (45) in erster Näherung bestimmt; (45) in Verbindung mit (59) stellt die Schwingung dar, welche die Lichtwelle im Atom induziert. Diese Formeln sind unter anderm für die Theorie der Zerstreuung (Dispersion) des Lichtes von Bedeutung; sie dienen zur Berechnung des elektrischen Momentes, welches nach dem Korrespondenzprinzip für die Emission der sekundären Lichtwelle maßgebend ist (14).

Es soll jetzt die Resonanzerscheinung näher untersucht werden für den Fall, daß die Resonanzstelle

$$W = h\nu + W_n = h\nu - |W_n| \tag{60}$$

[vgl. die zweite Gl. (59)] in das kontinuierliche Eigenwertsspektrum des Atoms fällt, was bei hinreichend großem $h\nu$ zutrifft. Die Eigenschwingungen in der nächsten Umgebung dieses Eigenwertes werden dann besonders stark angeregt werden, d. h. es besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß Atomelektronen auf hyperbelartige Bahnen von der Energie (60) (oder nahezu dieser Energie) hinaufgehoben werden und das Atom verlassen. Wir haben also lichtelektrischen Effekt; (60) ist die bekannte Einsteinsche Gleichung, welche aussagt, daß das absorbierte Energiequantum $h\nu$ in mechanische Energie ($W - W_n$) umgesetzt wird.

Die Ausbeute des Photoeffekts bestimmt sich am einfachsten durch das Integral

$$\int dW\, |a_W|^2.$$

In dem Ausdruck für a_W (59) kann man das zweite Glied, das keine Resonanz gibt, gleich weglassen; beachtet man überdies, daß der Integrand für große t ein sehr steiles Maximum bei W (60) hat, so

kann man für die langsam veränderliche Größe Φ ihren Wert an der Stelle W (60) einsetzen, und erhält:

$$\int dW' \, |a_{W'}|^2 = |\Phi_{Wn}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} dW' \frac{2\left|1 - \cos\frac{2\pi}{\hbar}(W' - W)t\right|}{(W' - W)^2} = |\Phi_{Wn}|^2 \cdot \frac{4\pi^2}{\hbar} t = \gamma \cdot t. \tag{61}$$

Die Zahl der Hyperbelbahnen nimmt also, wie zu erwarten, linear mit der Zeit zu; die Zahl der pro Zeiteinheit austretenden Photoelektronen ist

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{\hbar} \cdot |\Phi_{Wn}|^2. \tag{62}$$

Hierdurch ist zugleich der Absorptionskoeffizient des Lichtes von der Frequenz ν bestimmt. Ist $\mathfrak{N}$ die Zahl der Atome pro Volumeneinheit, so ist die in einem Kubikzentimeter pro Sekunde absorbierte Energie $\mathfrak{N}\gamma h\nu$. Dividiert man dies durch die Energie $\frac{c}{8\pi}|E|^2$, welche die primäre Lichtwelle pro Sekunde durch den Quadratzentimeter hindurchschickt (den Mittelwert des Poyntingschen Energiestroms), so erhält man den Absorptionskoeffizienten des Lichtes pro Zentimeter [vgl. (62), (56)]:

$$\mu = \frac{8\pi\mathfrak{N}\gamma h\nu}{c\,|E|^2} = \mathfrak{N} \cdot \frac{e^2\hbar^2}{2\pi c m^2} \cdot \frac{1}{\nu} \cdot \left| \sum_s \int d\tau e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} z_s} u_W \frac{\partial u_n}{\partial z_s} \right|^2. \tag{63}$$

Ist die Lichtwellenlänge c/ν groß gegen die Atomdimensionen, so kann man den Faktor $e^{-2\pi i \frac{\nu}{c} z_s}$ in dem Integranden von $\Phi_{\alpha\beta}$ (56) unterdrücken; ferner kann nach bekannten Matrizengleichungen (zu verifizieren durch wiederholte partielle Integration und Heranziehung der Wellengleichung)

$$\int d\tau u_\alpha \frac{\partial u_\beta}{\partial z_s} = \frac{4\pi^2 m}{\hbar^2}(W_\beta - W_\alpha) \int d\tau z_s u_\alpha u_\beta$$

gesetzt werden. Im Grenzfall großer Wellenlänge wird demnach unter Beachtung von (60):

$$\Phi_{Wn} = \frac{1}{2} E \cdot M_{Wn}, \tag{64}$$

$$M_{Wn} = -e \cdot \int d\tau \left(\sum_s z_s\right) u_n u_W. \tag{65}$$

M_{Wn} ist das dem Resonanzsprung $u_n \to u_W$ entsprechende Matrixelement der Projektion des elektrischen Momentes des Atoms auf die Feldrichtung z. Für den Absorptionskoeffizienten μ erhält man in dieser Näherung nach (62), (63):

$$\mu = \mathfrak{N} \cdot \frac{8\pi^3 \nu}{c} \cdot |M_{nW}|^2. \tag{66}$$

Zum Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung eignet sich vor allem der Photoeffekt von Röntgenstrahlen, da dieser hauptsächlich an den kernnahen Elektronen angreift, deren Eigenschwingungen wasserstoffähnlich gerechnet werden können. Die Formel (66) liefert in der Tat die richtige Größenordnung für den Absorptionskoeffizienten der Röntgenstrahlen und gibt auch seine Abhängigkeit von der Primärwellenlänge und der Kernladung des Atoms richtig wieder ([13]). Eine genauere Berechnung der (wasserstoffähnlichen) Matrixelemente M_{nW} (65) ist von Y. Nishina ([15]) durchgeführt worden; danach scheint es, daß die Formel (66) bei leichten Elementen, wo sie am besten stimmen sollte, um etwa 50 Proz. zu kleine Werte gibt. Erwähnt sei noch, daß die Absorptionskoeffizienten μ der verschiedenen Elektronenbahntypen (z. B. 2_2 und 2_1) nach (66) verschieden stark mit der Wellenlänge variieren, ganz entsprechend dem experimentellen Befunde von H. R. Robinson ([16]) (Methode der magnetischen Analyse der Photoelektronen nach M. de Broglie-Whiddington).

Um die Richtungsverteilung der Photoelektronen zu berechnen, müssen wir die Stromdichte der induzierten Schwingung (45), (59) in großem Abstand vom Atom untersuchen; bzw., da die Geschwindigkeit der Elektronen in allen Richtungen die gleiche ist, genügt auch die Kenntnis der Ladungsdichte $\psi\psi^*$. Deren Richtungsabhängigkeit übersieht man leicht im Grenzfall langer

Wellen („lang" gegen die Wellenlänge der Absorptionskante), d. h. wenn (64) gilt. Nach den Auswahlregeln für das Wasserstoffspektrum (bzw. für die Röntgenspektren) ist nämlich M_{Wn} nur dann von Null verschieden, wenn die Eigenschwingungen $u_n = u_{nkm}$ und $u_W = u_{Wkm}$ sich im Azimutalquantum k um ± 1 unterscheiden und die gleiche Orientierungsquantenzahl m haben. Handelt es sich also z. B. um den Photoeffekt an K-Elektronen ($n = 1$, $k = 1$, $m = 0$), so treten in der Entwicklung (45) nur die Eigenfunktionen mit $k = 2$, $m = 0$ auf; diese sind aber proportional der ersten Legendreschen Kugelfunktion $\cos\vartheta$, wo ϑ den Winkel der Elektronenbahn (Wellennormale) gegen die Feldrichtung z bedeutet. Folglich ist die Stromdichte proportional $\cos^2\vartheta$ [13]. Dieses Resultat gilt exakt nur für K-Elektronen (im Grenzfall langer Wellen), läßt sich aber aus bekannten Kugelfunktionenrelationen als Näherungsgesetz auch für beliebige Elektronentypen ableiten, und zwar auf Grund der Voraussetzung, daß die beiden nach der Auswahlregel in Betracht kommenden kontinuierlichen Eigenfunktionen $u_{W,\,k+1,\,m}$ und $u_{W,\,k-1,\,m}$ annähernd den gleichen asymptotischen Verlauf im Unendlichen (gleiche Phase) haben. Letzteres trifft zu bei großen Energien, d. h. bei kurzen Wellen, wo dann freilich die Formel (64) nur noch näherungsweise gilt.

Benutzt man statt (64) die exakte Formel (56), so läßt sich zeigen [17], daß das Maximum der Elektronenemission, welches nach (64) in die Richtung des elektrischen Feldvektors $\vartheta = 0$ ($\cos^2\vartheta = 1$) fallen würde, in Richtung der Primärwellennormale um einen Winkel ϑ_0 vorgeneigt ist, welcher durch die Gleichung bestimmt ist:

$$\sin\vartheta_0 = \frac{h\nu}{c}\sqrt{\frac{1}{2mh(\nu-\nu_0)}} \qquad (67)$$

(ν_0 = Frequenz der Absorptionsgrenze.) Genauer gesagt stellt $\pi/2 - \vartheta_0$ die Öffnung des Kegels dar, welcher die Zahl der Photoelektronen halbiert.

Die letzten experimentellen Untersuchungen über die Richtungsverteilung der von (polarisierten) Röntgenstrahlen ausgelösten Photoelektronen (Zählung der Nebelspuren in der Wilson-Kammer) haben die Theorie sehr gut bestätigt. Bei Beobachtung parallel zum Strahl ergibt sich die theoretische $\cos^2\vartheta$-Verteilung, mit dem Maximum in der Feldrichtung (Polarisationsebene) [18]; bei Beobachtung senkrecht zum Strahl die durch Vorneigung entsprechend (67) verzerrte $\cos^2\vartheta$-Verteilung [19]. Nur die Abhängigkeit der Vorneigung von der Grenzfrequenz ν_0 in (67) scheint bei langen Wellen ($\nu \sim \nu_0$) noch nicht in Ordnung zu sein; die Messungen scheinen im Gegensatz zu (67) eine Abnahme von ϑ_0 mit wachsendem ν_0 anzudeuten [19].

Der innere Photoeffekt, d. i. die Absorption von γ-Strahlen im Eigenatom unter Erzeugung sekundärer β-Strahlen, ist von B. Swirles [20] behandelt worden. Das Atom wird hier nicht durch eine ebene Welle sondern durch eine aus seinem eigenen Kern stammende Kugelwelle gestört. Der Absorptionskoeffizient für die K-Schale kommt theoretisch ungefähr in richtiger Größenordnung (allerdings wieder zu klein) heraus.

§ 3. Strahlungslose Sprünge (Auger-Effekt) [21].

Beim Wasserstoffatom ($N = 1$) liegen bekanntlich das diskrete und das kontinuierliche Eigenwertspektrum in getrennten Energiebereichen ($W_n < 0$, $W > 0$); beim Zwei- und Mehrkörperproblem dagegen gibt es in der Regel einen Energiebereich, in welchem sich diskretes und kontinuierliches Spektrum überdecken. Beim Heliumatom z. B. ist der Zustand, in dem sich beide Elektronen in 2-quantigen Bahnen befinden, energetisch gleich hoch wie der Zustand, in dem das eine Elektron einquantig gebunden und das andere frei ist (Hyperbelbahn). Streng genommen ist eine saubere Unterscheidung zweier derartiger in Resonanz stehender Zustände quantenmechanisch nur möglich, solange man die Wechselwirkung der Atomelektronen untereinander vernachlässigt; denn dann besteht, wie man leicht nachrechnet (vgl. das folgende), keine Übergangswahrscheinlichkeit zwischen den beiden Zuständen, da gleichzeitige Sprünge von 2 Elektronen in dieser Näherung verboten sind [wegen $V^0 = \sum_s f_s(x_s)$, $u_n = \prod_s \varphi_{s}(x_s)$]. Schaltet man aber nun die Wechselwirkung zwischen den Elektronen ein, so ergibt die Störungsrechnung, daß die beiden in Resonanz stehenden Zustände nicht mehr einzeln sondern nur gemeinsam in einem bestimmten Verhältnis angeregt werden können. Wird also z. B. primär der diskrete Zustand angeregt, so besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit dafür, daß das System in den Zustand des kontinuierlichen Spektrums umschlägt; d. h. es erfolgt eine spontane Ionisierung des Atoms. Die betreffenden diskreten Zustände haben demnach eine begrenzte Lebensdauer (d. h. eine kürzere als die durch die Strahlungsdämpfung bedingte Lebensdauer). Dies hat natürlich zugleich eine „Unschärfe" des betreffenden Eigenwerts zur Folge.

Um jene Lebensdauer nach der in III, § 1 entwickelten Methode zu berechnen, müssen wir nach dem oben Gesagten den Hamiltonschen Störungsoperator $H^1[\ ]$ mit der Coulombschen Wechselwirkungsenergie der Elektronen $V^1 = e^2 \Sigma \frac{1}{r_{ik}}$ identifizieren; und zwar denken wir uns diese Wechselwirkungskräfte in dem Augenblick ($t = 0$) eingeschaltet, in welchem die diskrete Eigenschwingung u_n angeregt wird. H^1 ist diesmal nicht explizite von der Zeit abhängig. Die Eigenschwingungen u_n, u_W des ungestörten Systems sind einfach Produkte von Wasserstoff-Eigenfunktionen bzw. lineare Kombinationen von solchen (wegen $V^0 = -Ne^2 \sum_s \frac{1}{r_s}$).

Setzt man in den Differentialgleichungen (49) rechterhand wieder den Anfangszustand ein [wie (57)], so folgt:

$$\frac{h}{2\pi i} \frac{da_W}{dt} = a_n \cdot V^1_{Wn}, \tag{68}$$

$$V^1_{Wn} = \int d\tau V^1 \psi_W^* \psi_n = e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W)t} \cdot \Phi_{Wn} \tag{69}$$

$$\Phi_{Wn} = \int d\tau V^1 u_W u_n. \tag{70}$$

Die Integration von (68), (69) ergibt:

$$a_W = a_n \Phi_{Wn} \cdot \frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W)t} - 1}{W_n - W}; \tag{71}$$

und man erhält für die Gesamtwahrscheinlichkeit, daß das System zur Zeit t in einem Zustand des kontinuierlichen Spektrums ($W \simeq W_n$) angetroffen wird, ähnlich wie beim Photoeffekt [vgl. (61)]:

$$\int dW |a_W|^2 = |\Phi_{Wn}|^2 \cdot \frac{4\pi^2}{h} t = \gamma t. \tag{72}$$

Die Größe

$$\gamma = \frac{4\pi^2}{h} |\Phi_{Wn}|^2 \tag{73}$$

bedeutet also wieder die Zahl der pro Zeiteinheit austretenden Elektronen, wo jetzt Φ_{Wn} nach (70) das dem Übergang $u_n \rightarrow u_W$ entsprechende Matrixelement der Wechselwirkungsenergie der Atomelektronen bedeutet. $1/\gamma$ ist die mittlere Lebensdauer des Zustandes u_n.

Gl. (73) stellt natürlich nur eine erste Näherung dar. Man könnte nach der Art des Integrationsverfahrens glauben, daß sie für sehr kleine Zeiten exakt gültig sei; doch trifft dies nicht zu, denn auch die zweite Näherung liefert in (72) Beiträge, die linear mit der Zeit gehen. Dagegen ist die Näherung (73) um so besser, je kleiner V^1 im Verhältnis zu V^0 ist; darum ist z. B. die entsprechende Näherung (62) beim Photoeffekt schon völlig ausreichend (die zweite Näherung würde bloß ein Zusatzglied proportional E^4 geben). Im vorliegenden Falle kann die Formel (73) besonders vorteilhaft auf die kernnahen Elektronen schwerer Elemente angewendet werden, wo die Wechselwirkungsenergie der Elektronen sehr klein gegen ihre Energie im Kernfeld ist.

Neben der Wahrscheinlichkeit (73) des spontanen „strahlungslosen" Zerfalls hat das Atom in dem (angeregten) Zustand u_n noch eine Wahrscheinlichkeit β, unter Emission von Licht spontan in einen energetisch tieferen Zustand überzugehen, eine Wahrscheinlichkeit, die sich bekanntlich nach dem (quantenmechanisch verschärften) Korrespondenzprinzip berechnen läßt. Mit Rücksicht auf diese beiden Zerfallsmöglichkeiten hat man dem Zustand die mittlere Lebensdauer $\frac{1}{\beta + \gamma}$ zuzuschreiben, und die „Unschärfe" des Eigenwerts, d. h. die Verbreiterung der von ihm ausgehenden Spektrallinien wird proportional $(\beta + \gamma)$ sein. $\frac{\beta}{\beta + \gamma}$ ist die Ausbeute der Lichtemission („Fluoreszenzausbeute" nach Auger), $\frac{\gamma}{\beta + \gamma}$ die Ausbeute der Elektronenemission.

Auger[22] hat diese Ausbeuten für die von ihm entdeckten strahlungslosen Sprünge durch Auszählung der Nebelspuren in einer Wilson-Kammer bestimmt. Primär werden die Atome (in Edelgase) durch Photoeffekt in der K-Schale einfach ionisiert; sie sind kenntlich an der Spur des Photoelektrons. Diejenigen unter ihnen, die noch eine weitere Spur bestimmter Reichweite aufweisen, sind

die strahlungslos zerfallenen Atome (Beispiel: in der L-Schale doppelt ionisiertes Atom plus freies Elektron); die übrigen sind offenbar unter Aussendung eines K-Serien Lichtquants zerfallen. Andererseits kann man die theoretischen Werte von β und γ mit Hilfe der Wasserstoff-Eigenfunktionen abschätzen. Der Vergleich zwischen Theorie und Erfahrung fällt durchaus befriedigend aus, sowohl was die Größenordnung der Lebensdauer als auch was ihre Abhängigkeit von der Atomnummer anlangt ([21]); γ wird in dieser Näherung von der Kernladung unabhängig.

Auf ähnliche Vorkommnisse bei gewissen Termen von Serienspektren (Beobachtungen von Russell und Saunders) und von Bandenspektren (V. Henri) sei hier nur kurz hingewiesen. Für die Anwendbarkeit obiger Formeln auf allgemeinere strahlungslose Übergänge ist nur wesentlich, daß man von einem ungestörten System ausgeht, in welchem sich die potentielle Energie V^0 additiv aus den Anteilen der einzelnen Teilsysteme (Elektronen, Kerne) zusammensetzt. Und zwar haben als „strahlungslose" Prozesse alle diejenigen Übergänge zu gelten, die durch solche Wechselwirkungskräfte H^1 verursacht werden, bei welchen die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von einem Teilsystem zum andern (die Retardierung der Potentiale) vernachlässigt werden kann. Ist letzteres nicht der Fall, so hat man es mit Energieübertragung durch elektromagnetische Strahlung zu tun, d. h. mit einem viel schwierigeren Problem, bei welchem die hier entwickelten Methoden versagen (vgl. die Schlußbemerkungen).

§ 4. Elektronenstoß.

Wir behandeln jetzt auch den Elektronenstoß als „strahlungslosen Übergang", indem wir das stoßende Kathodenstrahlelektron $x_0\, y_0\, z_0$ (vgl. den II. Abschnitt) zum System hinzurechnen. In nullter Näherung sei wie früher die Wechselwirkungsenergie zwischen Atom und Elektron unterdrückt; dann werden die Eigenfunktionen des Gesamtsystems: Atomeigenfunktionen $\psi_n = u_n(x_1 \dots z_N)\, e^{\frac{2\pi i}{h} W_n t}$, multipliziert mit Eigenfunktionen des freien Elektrons, d. h. ebenen Wellen

$$e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t}, \quad \omega = \omega(|\mathfrak{k}|).$$

Um die letzteren mitnehmen zu können, müssen wir die Formeln in III, § 1 ein wenig erweitern. Statt (45) ist offenbar anzusetzen:

$$\left.\begin{aligned} \psi = &\sum_n \iiint d\mathfrak{k}_x d\mathfrak{k}_y d\mathfrak{k}_z a_n(\mathfrak{k}_x \mathfrak{k}_y \mathfrak{k}_z)\, \psi_n\, e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t} \\ &+ \int dW \iiint d\mathfrak{k}_x d\mathfrak{k}_y d\mathfrak{k}_z a_W(\mathfrak{k}_x \mathfrak{k}_y \mathfrak{k}_z)\, \psi_W\, e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t}. \end{aligned}\right\} \quad (74)$$

Setzt man dies in die Wellengleichung (47) ein und berücksichtigt die Differentialgleichung der Eigenfunktionen ψ_n, so folgt:

$$\frac{h}{2\pi i}\left[\sum_n \iiint d\mathfrak{k}_x d\mathfrak{k}_y d\mathfrak{k}_z \frac{da_n(\mathfrak{k}_x \mathfrak{k}_y \mathfrak{k}_z)}{dt}\, \psi_n\, e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t} + \int dW \iiint d\mathfrak{k}_x d\mathfrak{k}_y d\mathfrak{k}_z \frac{da_W(\mathfrak{k}_x \mathfrak{k}_y \mathfrak{k}_z)}{dt}\, \psi_W\, e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t}\right] = H^1[\psi].$$

Multipliziert man hier mit

$$\psi_m^*\, e^{+i(\mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0) - i\omega' t}\, d\tau \quad (d\tau = d\tau_0\, d\tau_1 \cdots d\tau_N)$$

und integriert, so kommt auf Grund des Fourier-Theorems:

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{da_m(\mathfrak{k}'_x \mathfrak{k}'_y \mathfrak{k}'_z)}{dt} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\tau\, \psi_m^*\, e^{+i(\mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0) - i\omega' t} H^1[\psi]\,; \quad (75)$$

entsprechendes gilt für a_W. Setzen wir nun für unsere Zwecke $H^1 = V^1$, und approximieren ψ rechterhand durch den Anfangszustand $\psi_n \cdot a\, e^{-i(\mathfrak{k}\mathfrak{r}_0) + i\omega t}$, so folgt mit (13) und (39):

$$\frac{h}{2\pi i}\frac{da_m(\mathfrak{k}'_x \mathfrak{k}'_y \mathfrak{k}'_z)}{dt} = a \cdot \Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k}) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}(W_n - W_m)t}\, e^{i(\omega - \omega')t} \quad (76)$$

$$= a\, \Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k}) \cdot e^{\frac{2\pi i}{h}(T_{nm} - T')t}$$

$$\Phi_{mn} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\tau\, V^1 \cdot e^{-i(\mathfrak{k} - \mathfrak{k}', \mathfrak{r}_0)}\, u_m u_n. \quad (77)$$

Die Integration von (76) mit Rücksicht auf die Anfangsbedingungen ergibt:

$$a_m(\mathfrak{k}'_x\mathfrak{k}'_y\mathfrak{k}'_z) = a\,\Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k})\,\frac{e^{\frac{2\pi i}{h}(T'_{nm}-T')t}-1}{T_{nm}-T'}. \tag{78}$$

Hiernach besteht eine Wahrscheinlichkeit dafür, daß das Atom von dem $n$ten auf den $m$ten Zustand springt und gleichzeitig die Welle $\mathfrak{k}$ in die Welle $\mathfrak{k}'$ übergeführt wird, und zwar tritt Resonanz ein für $T' = T_{nm}$, d. h. für $|\mathfrak{k}'|^2 = K^2_{nm}$ (33). Die Gesamtzahl der bis zur Zeit t angeregten m-Zustände ist offenbar

$$\int\int\int dx_0\,dy_0\,dz_0 \cdot \Big|\int\int\int d\mathfrak{k}'_x d\mathfrak{k}'_y d\mathfrak{k}'_z \cdot a_m(\mathfrak{k}'_x\mathfrak{k}'_y\mathfrak{k}'_z)\cdot e^{-i(\mathfrak{k}'\mathfrak{r}_0)+i\omega' t}\Big|^2,$$

was mit Hilfe des Fouriertheorems übergeht in

$$(2\pi)^3\int\int\int d\mathfrak{k}'_x d\mathfrak{k}'_y d\mathfrak{k}'_z \cdot a_m(\mathfrak{k}'_x\mathfrak{k}'_y\mathfrak{k}'_z)^2 = (2\pi)^3\int d\Omega\int d\mathfrak{k}'\cdot\mathfrak{k}'^2\cdot a_m(\mathfrak{k}')^2$$

$$= (2\pi)^3\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{8\pi^2 m}{h^2}\right)^{3/2}\cdot a^2\cdot\int d\Omega\int dT'\,|T'|\,\Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k})^2\cdot\frac{2\left|1-\cos\frac{2\pi}{h}(T'-T_{nm})t\right|}{(T'-T_{nm})^2}$$

$$= t\cdot a^2\cdot\frac{(2\pi)^8 m}{h^4}\,|2m\,T_{nm}|\int d\Omega\,\Phi_{mn}(\mathfrak{k}'\mathfrak{k})^2.$$

Die Zahl der pro Sekunde in den Raumwinkel $d\Omega$ (Richtung $\mathfrak{k}'$, $|\mathfrak{k}'| = k_{nm}$) gestreuten Elektronen von der Energie T_{nm} ist demnach [vgl. (77)]:

$$d\Omega\cdot a^2\cdot\frac{4\pi^2 m}{h^2}\,|2m\,T_{nm}|\cdot\Big|\int d\tau\,V^1 e^{-i(\mathfrak{k}-\mathfrak{k}',\mathfrak{r}_e)}\,u_m u_n\Big|^2. \tag{79}$$

Dies entspricht genau der ersten Näherung der Bornschen Störungsrechnung (42), (37). Würde man nun die erste Näherung (78) rechterhand in (75) einführen und abermals integrieren, so würde man zu den Formeln der zweiten Bornschen Näherung gelangen, und so fort. Es versteht sich von selbst, daß die Wahrscheinlichkeit der Ionisierungsprozesse ebenso wie die der Anregungsprozesse nach dem obigen Verfahren berechnet werden kann (Index W statt m).

Wie schon oben hervorgehoben wurde, konvergiert dieses Näherungsverfahren dann und nur dann, wenn das Atom neutral ist, d. h. wenn V^1 für große r_0 mindestens wie r_0^{-2} verschwindet. Handelt es sich dagegen um ein ionisiertes Atom, etwa von der Gesamtladung Ze, so muß der rein Coulombsche Anteil der Wechselwirkung ($-Ze^2/r_0$) in die ungestörte Hamiltonfunktion H^0 mit aufgenommen werden, d. h. man muß bezüglich der Koordinaten $x_0 y_0 z_0$ die Fourierentwicklung (74) (Entwicklung nach den Eigenfunktionen des freien Elektrons) ersetzen durch eine Entwicklung nach Wasserstoff-Eigenfunktionen.

Auf einen Punkt möge noch hingewiesen werden. Rechnet man im ungestörten Atom mit wasserstoffähnlich gebundenen Elektronen, d. h. vernachlässigt man in H^0 die Wechselwirkung der Atomelektronen untereinander, so werden die Wahrscheinlichkeiten für solche Anregungsprozesse, bei denen zwei oder mehr Elektronen gleichzeitig „springen" würden, gleich Null [da nämlich $V^1 = \sum_s f_s(x_0, x_s)$ und $u_n = \prod_s \varphi_s(x_s)$]; infolgedessen bekommt man in dieser Näherung auch keine Wahrscheinlichkeit für Doppelionisation, d. h. für eine gleichzeitige Abtrennung von 2 Atomelektronen. Ist aber das Atom einmal durch Photoeffekt oder Elektronenstoß einfach ionisiert und zwar auf einen energetisch genügend hohen Zustand gebracht, so steht letzterer in Resonanz mit doppelt ionisierten Atomzuständen. Schaltet man also jetzt die Wechselwirkung der Atomelektronen ein, so werden strahlungslose Übergänge aus dem einfach ionisierten in den doppelt ionisierten Zustand stattfinden, deren Wahrscheinlichkeit ähnlich wie in III, § 3 berechnet werden kann. Auf diese Weise kommt heraus, daß die Zahl der doppelt ionisierten wie die der einfach ionisierten Atome linear mit der Zeit zunimmt; wird also ein Atom durch Licht von hinreichend hoher Frequenz oder durch Kathodenstrahlen von hinreichend hoher Geschwindigkeit ionisiert, so steht die Zahl der Doppelionisationen zu der der Einfachionisationen in einem festen Verhältnis, das sich nach der vorstehend entwickelten Methode ermitteln läßt.

Schlußbemerkungen.

Die Anwendungen der Theorie auf die Probleme des Elektronenstoßes, des Photoeffekts und des Augereffekts werden genügen um zu zeigen, wie man in jedem Fall eine eindeutige Aussage über die Übergangswahrscheinlichkeiten erhalten kann. Daß wir ursprünglich nur die Bewegung von Teilchen gleicher Masse (Elektronen) behandelt haben, ist keine wesentliche Beschränkung;

insbesondere die Methode des III. Abschnittes läßt sich ohne weiteres auf die Fälle übertragen, in denen auch die Kernbewegung eine Rolle spielt (z. B. Dissoziation von Molekülen). Viel wesentlicher ist die schon in der Einleitung erwähnte Beschränkung, die uns verbietet den Vorgang der Strahlungsdämpfung hier zu besprechen. Zwar ist es Dirac [23] gelungen, die Lichtemission auf Grund der Differentialgleichungen (49) zu behandeln, indem er die elektromagnetischen Eigenschwingungen eines Hohlraumes durch gequantelte harmonische Oszillatoren symbolisch repräsentiert und die Resonanzübergänge zwischen diesen und einem im Hohlraum befindlichen Atom untersucht. Hierzu reichen aber die Methoden der Wellenmechanik nicht aus, vielmehr wird dabei der weiter reichende Apparat der q-Zahlenrechnung benötigt. Lichtemission und Lichtzerstreuung sind ja schon in der klassischen Physik Probleme der Elektrodynamik, und es ist deshalb natürlich, daß sie auch in der Quantentheorie allgemeinere und abstraktere Methoden erfordern, auf deren Darstellung wir im Rahmen dieses Berichtes verzichten müssen.

Literaturverzeichnis.

1) H. A. Kramers, Phil. Mag. **46**, 836, 1923.
2) E. Fermi, Lincei Rend. **33**, 243, 1924 und **1**, 72, 1925.
3) M. Born, Zeitschr. f. Phys. **37**, 863 und **38**, 803, 1926.
4) E. Schrödinger, mehrere Arbeiten in den Ann. d. Phys. 1926, in Buchform erschienen als „Abhandlungen zur Wellenmechanik". Leipzig 1927.
5) L. de Broglie, Theses, Paris 1924. Deutsche Übersetzung: „Untersuchungen zur Quantentheorie", Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1927.
6) H. Weyl, Math. Ann. **68**, 220, 1910; E. Furs, Ann. d. Phys. **81**, 281, 1926, § 3.
7) M. Born, Göttinger Nachrichten 1926, S. 146.
8) W. Elsasser, Zeitschr. f. Phys. **45**, 522, 1927.
9) Vgl. auch G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **40**, 590, 1926, § 2; J. R. Oppenheimer, Zeitschr. f. Phys. **43**, 413, 1927; W. Gordon, Zeitschr. f. Phys. **48**, 180, 1928.
10) Vgl. auch J. A. Gaunt, Proc. Cambridge Phil. Soc. **23**, 732, 1927.
11) H. Faxén u. J. Holtsmark, Zeitschr. f. Phys. **45**, 307, 1927; L. Mensing, Zeitschr. f. Phys. **45**, 603, 1927.
12) Vgl. P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **112**, 661, 1926, § 5.
13) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **40**, 574, 1926; J. R. Oppenheimer, Zeitschr. f. Phys. **41**, 268, 1927; G. Beck, Zeitschr. f. Phys. **41**, 443, 1927; P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **114**, 243, 1927.
14) E. Schrödinger, Ann. d. Phys. **81**, 109, 1926; O. Klein, Zeitschr. f. Phys. **41**, 407, 1927; P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **114**, 710, 1927.
15) Y. Nishina, Vortrag auf der Gautagung der D. Phys. Gesellschaft in Göttingen, 5. Febr. 1928; Verh. d. D. phys. Ges. **9**, 6, 1928.
16) H. R. Robinson, Proc. Roy. Soc. **104**, 455, 1923; H. R. Robinson u. A. M. Cassie, Proc. Roy. Soc. **113**, 282, 1926.
17) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **41**, 828, 1927.
18) F. Kirchner, Ann. d. Phys. **83**, 521, 1927.
19) P. Auger, Journ. de Phys. **8**, 85, 1927.
20) B. Swirles, Proc. Roy. Soc. **116**, 491, 1927.
21) G. Wentzel, Zeitschr. f. Phys. **43**, 524, 1927; E. Fues, Zeitschr. f. Phys. **43**, 726, 1927.
22) P. Auger, Ann. de Phys. **6**, 183, 1926.
23) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. **114**, 243 u. 710, 1927.

(Eingegangen 31. März 1928.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Beobachtungen beim Übergange des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen.

(Mitteilung der Studiengesellschaft für elektrische Beleuchtung m. b. H.)

Von H. Ewest und A. Rüttenauer.

Bei der Herstellung von Gleichstrom-Wolframbogenlampen für höhere Stromstärken wurde eine Reihe von Beobachtungen über den Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen gemacht, die für theoretische Betrachtungen wichtig sein können und daher im folgenden kurz mitgeteilt seien:

Die Wolframbogenlampe ist ein zwischen Wolframelektroden brennender Lichtbogen von 5—7 mm Bogenlänge, luftdicht eingeschlossen in eine mit Stickstoff gefüllte Glashülle. Bei der Gleichstromlampe besteht die Anode aus einem reinen Wolframkörper, die Kathode aus einer Mischung von reinem Wolfram und Thoroxyd. Die Elektroden werden in Formen gepreßt und bei Temperaturen, die genügend weit unter dem Schmelzpunkt der benutzten Materialien liegen, längere Zeit gesintert. Zur Füllung der Lampen wird reiner Stickstoff benutzt, der (abgesehen von einigen Zehntel Proz. Argon) sorgfältigst von Verunreinigungen befreit wird.

1. Übergang des Glimmbogens in Form 3.

Der Lichtbogen der Wolframbogenlampe ist bei den normalen Betriebsstromstärken nach der Hagenbachschen Definition[1]) ein Glimmbogen der Form 1, d. h. ein Bogen, bei dem die Anode von dem anodischen Glimmlicht ganz oder teilweise bedeckt ist. Bei Steigerung der Stromstärke geht der Glimmbogen unter hörbarem Zischen in den normalen Lichtbogen, Form 3, über, wobei die Bogenspannung um etwa 10 Volt sinkt. Dieser Übergang findet immer dann statt, wenn die anodische Glimmlichtdichte einen solchen Wert erreicht hat, daß die hierdurch erzeugte Wärmeproduktion das Anodenmaterial an einer Stelle zum Verdampfen bringt. Der Übergang in den normalen Lichtbogen, der sog. Zischpunkt, wird also durch eine Erhitzung des Anodenmaterials, die auf einen sehr kleinen Teil der Anodenoberfläche beschränkt ist, veranlaßt. Die Temperatur an der dem Bogen abgewandten Seite der Anode t_1 kann hierbei je nach der Größe und Form der Anode und ihrer Wärmeableitung gegen die Temperatur am Lichtbogenansatz t_2 eine erhebliche Differenz aufweisen. Die Temperaturdifferenz ist um so größer oder die Temperatur t_1 liegt um so tiefer unter t_2, je größer die Anode ist, was aus den Messungen der folgenden Tabelle ersichtlich ist.

Tabelle.

Anodendurchmesser	Anodendicke	Anodentemper. t_1	Stromstärke beim Übergang in den Lichtbogen
5,2 mm	2,6 mm	2600° K	7,0— 7,5 Amp.
7,1 mm	3,2 mm	2550° K	7,5— 8,0 „
9,1 mm	3,8 mm	2400° K	10,0—10,5 „
12,8 mm	4,2 mm	2200° K	15,0—17,0 „

Kleine Anoden sind ganz oder zum größten Teil vom anodischen Glimmlicht bedeckt. Dadurch herrscht auf der Anodenoberfläche eine ziemlich gleichmäßige Temperaturverteilung. Da auch die Wärmeableitung bei kleinen Anoden gleichmäßiger ist als bei großen, kann der Glimmbogen zwischen solchen Elektroden bei sehr viel höheren Temperaturen t_1, also bei größeren Strombelastungen aufrecht erhalten werden als bei großen Elektroden. Die großen Elektroden sind nämlich nur noch teilweise vom anodischen Glimmlicht bedeckt. Hierdurch ist der Temperaturunterschied zwischen der dem Bogen abgewandten Seite der Anode und dem Glimmbogenansatz ungleich größer als bei kleinen Elektroden. Durch die noch ungleichmäßigere Wärmeableitung erfolgt bei großen Elektroden der Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen bei geringeren Temperaturen t_1, also bei geringeren Strombelastungen. Es kommt noch hinzu, daß der Glimmbogenansatz bei geringer Ausdehnung seine Lage auf der Anodenoberfläche leicht verschiebt. Findet er hierbei eine für den Übergang in den Lichtbogen günstige Stelle, die z. B. oxydischer Natur sein kann, so zieht sich das anodische Glimmlicht noch stärker zusammen, bewirkt vorzeitig eine lokale Überhitzung des Anodenmaterials, so daß der normale Lichtbogen entstehen kann. Brennt eine Lampe mit normalem Lichtbogen, so findet eine starke Verdampfung des Anodenmaterials statt; nach 3—5 Stunden ist der Lampenkolben vollkommen geschwärzt.

1) A. Hagenbach, Der elektrische Lichtbogen.

2. Übergang des Glimmbogens in Form 2.

An einer Reihe von Wolframbogenlampen wurde beobachtet, daß der Glimmbogen bei Steigerung der Stromstärke zuerst in die von Hagenbach bezeichnete Form 2 überging und dann erst bei weiterer Erhöhung der Stromstärke in den normalen Lichtbogen, Form 3. Beim Lichtbogen der Form 2 sitzt auf der Anode an dem Bogenansatz ein gelbliches Lichtbüschel. Beim Übergang der Form 1 in 2 sinkt die Bogenspannung um 1—2 Volt. Diese Erscheinung konnte nicht immer beobachtet werden, ebenso war die Ursache hiervon nicht festzustellen.

3. Abhängigkeit des Zischpunktes vom Gasdruck.

Bei Wolframbogenlampen mit einer Stickstoffüllung zeigte sich nun, daß der Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen bei um so höheren Stromstärken stattfand, je niedriger der Gasdruck war. Bei niedrigerem Gasdruck wird die anodische Glimmlichtdichte kleiner, d. h. das anodische Glimmlicht kann einen größeren Teil der Anodenoberfläche bedecken und aus den in Abschnitt 1 erwähnten Gründen tritt der Zischpunkt bei höheren Strombelastungen auf. So lag z. B. bei einer Anode von 7,8 mm Durchmesser und 3,4 mm Dicke der Zischpunkt bei einer Stickstoffüllung von 100 mm Hg bei 7,0 Amp., bei 75 mm Hg bei 9,0 und bei 25 mm Hg bereits über 15,0 Amp.

4. Abhängigkeit des Zischpunktes von der Oberflächenbeschaffenheit und Form der Anode.

Kleine Krater und Vertiefungen auf der Anodenoberfläche verdichten das anodische Glimmlicht und geben so schon bei geringen Stromstärken Veranlassung zur Entstehung des normalen Lichtbogens. Verschmilzt man in einem Kohlelichtbogen die Oberfläche einer gesinterten Wolframanode, die nach der Sinterung eine rauhe Oberfläche besitzt, zu einem einheit-

lichen Meniskus, so daß eine gleichförmige, völlig spiegelnde Oberfläche entsteht, so tritt der Zischpunkt bei um etwa 50 Proz. höheren Stromstärken auf als bei rauhen Oberflächen[1]).

Die Abhängigkeit des Zischpunktes von der Form der Anode ist, wie bereits erwähnt, von der Wärmeableitung derselben bedingt.

5. Abhängigkeit des Zischpunktes vom Anodenmaterial.

Da bei den Untersuchungen an Wolframbogenlampen lediglich Wolframanoden benutzt wurden, konnte nur die Abhängigkeit des Zischpunktes von Verunreinigungen der Anode, die bei ungenügender Sinterung der Anode noch zurückblieben, beobachtet werden. Wenn sich auf der Anodenoberfläche Verunreinigungen oxydischer Natur befinden, so zieht sich das anodische Glimmlicht auf diese Stelle zusammen. Es entsteht eine ungleichmäßige Flächenbedeckung, wie dies auch beim kathodischen Glimmlicht der Fall ist. An einer solchen Stelle oxydischer Verunreinigungen kann die anodische Glimmlichtdichte so groß werden, daß plötzlich der Glimmbogen in den normalen Lichtbogen umschlägt, wobei die oxydischen Verunreinigungen zum Verdampfen gebracht werden. Sowie der Verdampfungsprozeß zu Ende ist, geht der normale Lichtbogen von selbst wieder in den Glimmbogen zurück.

6. Abhängigkeit des Zischpunktes von der Gasart.

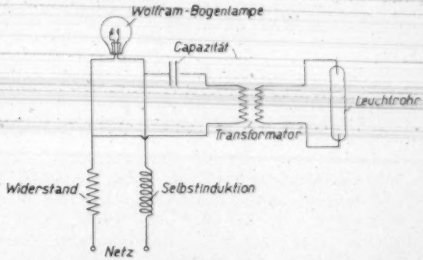
Es wurde gefunden, daß bei Wolframbogenlampen mit Argonfüllung der Zischpunkt bei sonst gleichen Versuchsbedingungen bei wesentlich höheren Strombelastungen lag als bei Lampen mit Stickstoffüllung. Es genügte bereits ein Zusatz von $^1/_4$—1 Proz. Argon zur Stickstoffüllung, um das Auftreten des Zischpunktes auf 20—30 Proz. höhere Stromstärken zu verlegen. Bei Füllungen mit reinem Wasserstoff, ebenso bei Quecksilberdampf, erfolgte der Übergang des Glimmbogens in den Lichtbogen bei geringeren Strombelastungen als bei reinem Stickstoff. Geringe Zusätze von Wasserstoff von $^1/_{10}$—5 Proz. hatten dagegen keinen wesentlichen Einfluß auf den Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen.

7. Abhängigkeit des Zischpunktes von der Kathode.

Eine Abhängigkeit des Auftretens des Zischpunktes von der Kathode wurde in keinem Falle beobachtet.

1) Diese Untersuchungen sind im wesentlichen von Herrn Dr. Bobek ausgeführt worden; an den übrigen hier mitgeteilten Beobachtungen ist Herr Dr. Bobek ebenfalls beteiligt.

Beim Übergang des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen kommen bei einzelnen Lampen hörbare Schwingungen zustande; in den meisten Fällen vernahm man jedoch nur ein kurzes Zischen. Schaltet man eine normale Gleichstrom-Wolframbogenlampe, Type 4 G, in eine Apparatur, wie sie zur Erzeugung von hochfrequenten Strömen mittels Wolframbogen-Schwingungslampe üblich ist[1]), also parallel zur Lampe eine Kapazität von 4—6 μF und einen Hochfrequenztransformator, an letzterem ein Leuchtrohr, z. B. einen Neonleuchtbuchstaben (siehe Schaltskizze), so leuchtet der Neon-Buchstabe bei 4—6 Amp. nur sehr schwach auf, da die elektrischen Verhältnisse dieser Lampe (geringe Bogenlänge, geringer Unterschied der



Schaltschema zur Schwingungserzeugung für den Nachweis des Übergangs des Glimmbogens in den Zischbogen.

Zünd- und Abreißspannung) zur Erzeugung von Schwingungen wenig geeignet sind, im Gegensatz zur eigentlichen Schwingungslampe, die für diese Zwecke besonders konstruiert ist. Steigert man jedoch die Stromstärke der Lampe, so leuchtet der Neon-Buchstabe während des Überganges des Glimmbogens in den normalen Lichtbogen hell auf. Der Übergang selbst geht sehr viel langsamer vor sich als ohne Schwingungsschaltung. Man kann so genau beobachten, daß der Übergang in 2 Etappen zu etwa 5 Volt vor sich geht. Besonders deutlich ist das Zischen der Lampe zwischen dem ersten und zweiten Voltsprung wahrnehmbar. Brennt die Bogenlampe dauernd mit Form 3 der Entladung, so leuchtet das Neonrohr wiederum nur ganz schwach.

Diese Beobachtungen wurden vor längerer Zeit bei der von Herrn Dr. Skaupy veranlaßten Weiterentwicklung der Wolframbogenlampe gemacht.

Herrn Dr. Skaupy danken wir bestens für verschiedene Anregungen.

1) F. Skaupy, E. T. Z. 48 (1927), 1797.

(Eingegangen 20. April 1928).

Wärmeübergang strömender Flüssigkeit in Rohren.

Von L. Schiller und Th. Burbach.

Der hauptsächliche Entwicklungsgang der Theorie[1]) ist kurz so: Zuerst hat Reynolds[2]) in Erkenntnis des Gemeinsamen von Wärme- und Impulskonvektion eine Gleichung für den Wärmeübergang abgeleitet. Dann hat — ohne Kenntnis der Reynoldsschen Arbeit — Prandtl[3]) durch strengere Behandlung die Grenzen der Reynoldsschen Gleichung aufgezeigt: sie gilt nur für $\sigma = \frac{\lambda}{c\mu} = 1$ (λ = Wärmeleitfähigkeit, c = spez. Wärme bei konstantem Druck, μ = Zähigkeit), d. h. annähernd für reale Gase, dagegen nicht für Flüssigkeiten. Für diese hat Prandtl gleichzeitig eine Theorie aufgestellt: ausgehend von seiner Grenzschichtenhypothese teilt er die Flüssigkeit in einen turbulenten Kern und in eine laminare Grenzschicht. Für den ersteren gilt — wegen der dort völlig gleichartig verlaufenden Konvektion von Impuls und Wärme — derselbe Gedankengang wie oben (nur das Zähigkeits- bzw. das Wärmeleitungsglied fehlt jetzt in den Differentialgleichungen, und daher erübrigt sich die Bedingung $\sigma = 1$); für die Grenzschicht gilt der laminare bzw. der Wärmeleitungsansatz. Da beide Wärmeströme gleich sein müssen, ergibt sich so eine neue Gleichung für den Wärmeübergang.

Sie enthält aber noch eine Unbekannte: $\frac{u_g}{u}$, das Verhältnis der Geschwindigkeit an der Innenseite der Grenzschicht zu der mittleren Geschwindigkeit. Prandtl gibt gleich einen Weg zu seiner angenäherten Bestimmung, nämlich aus den Nusseltschen Wärmeübergangsbeobachtungen. Er kommt so zum Wert 0,056, den er allerdings als unwahrscheinlich klein bezeichnet. Es ist ein eigenartiges Spiel des Zufalls und kennzeichnet den Grad der Unsicherheit, daß 6 Jahre später G. J. Taylor — nun augenscheinlich wieder ohne Kenntnis der Prandtlschen Arbeit — ganz ähnliche Grenzschichtbetrachtungen anstellt und — ausgehend von Stantons Geschwindigkeitsverteilungsmessungen für $\frac{u_g}{u}$ den Wert 0,56, also genau das Zehnfache findet. Nun ist man allerdings neuerdings[1]) — seit Entwicklung der Prandtl-Kármánschen Ähnlichkeitsbetrachtungen — imstande, $\frac{u_g}{u}$ sicherer abzuschätzen, insbesondere als Funktion der Reynoldsschen Zahl anzugeben. Es ergibt sich unter Voraussetzung des $\frac{1}{7}$-Gesetzes $\frac{u_g}{u} = \text{Zahl} \cdot R^{-1/8}$, wobei Prandtl die „Zahl" zu etwa 1 abschätzt. Eine Prüfung an geeigneten Versuchen steht noch aus, dagegen hat Stanton[2]) die Taylorsche Gleichung an Wasserversuchen von Sönnecken[3]), an eigenen und ebenso an Luftversuchen von Pannell geprüft. Die Abweichungen betragen 20—40 Proz.

Die experimentelle Arbeit, die sowohl nach der Güte der Versuche als auch nach ihrer Fassung in eine von Ähnlichkeitsbetrachtungen diktierte Form heute als die klassische Arbeit bezeichnet werden kann, ist die von Nusselt[4]) an Preßluft und anderen Gasen. Leider aber versagte die Nusseltsche Gleichung bisher gegenüber den mit Flüssigkeiten angestellten Versuchen. Lag das an der Ungeeignetheit der Versuche (zu kurze Anlauflängen) oder daran, daß die Nusseltsche Gleichung vielleicht nur für Werte σ nahe 1 gilt, oder an beidem? Wir werden im Folgenden eine theoretische Behandlung geben, die auch für $\sigma \neq 1$ zu einer der Nusseltschen weitgehend verwandten Gleichung führt. Diese Gleichung stimmt bei entsprechend großen Anlauflängen mit unseren, an Wasser angestellten Messungen befriedigend überein.

Ehe wir die Ableitung für $\sigma \neq 1$ durchführen, wollen wir vorerst eine etwas veränderte Ableitung für $\sigma = 1$ angeben, verändert insofern, als wir schon hier unser Hauptaugenmerk auf die Vorgänge an der Wand (statt in der Grenzschicht) richten. Dies wird uns später im Falle $\sigma \neq 1$ den Vorteil verschaffen, daß der mehr oder weniger unsichere Quotient $\frac{u_g}{u}$ in unserer Rechnung und in unserem Resultat nicht auftaucht, und wir außerdem schon im ersten Fall $\sigma = 1$

1) Uns beschäftigen hier nur die Schritte, die zu Ergebnissen für „Flüssigkeiten" im engeren Sinn geführt haben. Die Entwicklung nach anderer Richtung, nämlich von dem Gebiet „großer Anlauflängen", das uns hier beschäftigt, in das (thermische und hydrodynamische) „Anlaufgebiet" hinein verdanken wir den Arbeiten von v. Kármán-Latzko.

2) Proceedings Manchester Lit. and Phil. Soc. 1874, pag. 9. S. auch bei Stanton, On the Passage of Heat between Metal Surfaces and Liquids in contact with them. Phil. Trans. Roy. Soc. (A) **190**, 67, 1898.

3) Eine Beziehung zwischen Wärmeaustausch und Strömungswiderstand der Flüssigkeiten. Physik. Zeitschr. 1910, S. 1072—1078.

1) Worauf mich Herr Prandtl freundlichst hingewiesen hat.

2) Techn. Rep. of the Advisory Committee for Aëronautics 1916/17, S. 16.

3) Der Wärmeübergang von Rohrwänden an strömendes Wasser. Diss. Techn. Hochschule München, 1910.

4) Der Wärmeübergang in Rohrleitungen. Habilitationsschrift 1909.

zu einer präzisen Angabe kommen, für welchen Bereich die einzelnen Stoffkonstanten einzusetzen sind. Für $\sigma = 1$ folgt aus der Ähnlichkeit[1]) der beiden Differentialgleichungen (der thermischen und der hydrodynamischen) die Ähnlichkeit des Geschwindigkeits- und des Temperaturfeldes. Insbesondere gilt deswegen an der Wand:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_W \cdot \frac{1}{\bar{u}} = \left(\frac{dT}{dy}\right)_W \cdot \frac{1}{\bar{T} - T_W}$$

(Index „W" = „an der Wand", u = Geschw., T = Temperatur, $\bar{u}, \bar{T}$ = Mittelwerte der Flüssigkeit).

Aus dem Widerstandsgesetz folgt:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)_W \cdot \frac{1}{\bar{u}} = \frac{\psi \varrho \bar{u}}{4\mu_W}$$

(ϱ = Dichte, μ = Zähigkeit, ψ = Widerstandskoeffizient). Durch Elimination von $\left(\frac{du}{dy}\right)_W$:

$$\left(\frac{dT}{dy}\right)_W = \frac{\psi \varrho \bar{u}}{4\mu_W} \cdot (\bar{T} - T_W).$$

Für den Wärmetransport Q durch die Wand gilt:

$$\frac{Q}{t \cdot F} = \lambda_W \cdot \left(\frac{dT}{dy}\right)_W = \frac{\lambda_W \psi \varrho \bar{u}}{4\mu_W} (\bar{T} - T_W)$$

(t = Zeit, F = Fläche)

und für die Wärmeübergangszahl α in der üblichen Definition:

$$\alpha = \frac{Q}{t \cdot F(\bar{T} - T_W)} = \frac{\lambda_W \psi \varrho \bar{u}}{4\mu_W};$$

und schließlich in dimensionslosen Größen:

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = \frac{\psi \varrho \bar{u} d}{4\mu_W} \qquad (1)$$

(d = Rohrdurchmesser)

Im Fall $\sigma \neq 1$ gilt der obige Ähnlichkeitsansatz für Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld allgemein nicht mehr; er gilt noch (wegen des Wegfallens des Zähigkeits- und Wärmeleitungsgliedes) in der turbulenten Kernströmung, dagegen nicht mehr in der laminaren Grenzschicht, also auch nicht an der Wand. Um nun das von dem tatsächlichen Geschwindigkeitsgefälle an der Wand abweichende Geschwindigkeitsgefälle zu finden, welches das Abbild des gesuchten, vorhandenen Temperaturgefälles darstellt, verfahren wir folgendermaßen: Wir denken uns eine Flüssigkeitsströmung, die von der vorhandenen darin abweicht, daß sie eine abgeänderte Zähigkeit μ' besitzt, die $\sigma'_W = \sigma' = 1$ macht; d. h. $\mu'_W = \mu' = \mu_W \sigma$. Dann ändert diese neue Zähigkeit an dem Strömungs- und Temperaturbild der Kernströmung, das wesentlich durch konvektive Wirkungen beeinflußt ist, nichts. Dagegen wird das Geschwindigkeitsfeld der Grenzschicht jetzt das Abbild des vorhandenen Temperaturfeldes und insbesondere das Gefälle an der Wand das gesuchte Abbild des gesuchten Temperaturgefälles. Die Abänderung des Geschwindigkeitsfeldes an der Wand ist wegen der dort streng vorhandenen Laminarströmung mit genügender Annäherung[1]) ohne Einfluß auf den Wärmeübergang.

Das gesuchte Geschwindigkeitsgefälle der Ersatzflüssigkeit an der Wand erhält man aus dem tatsächlich vorhandenen mit Hilfe des Blasiusschen Widerstandsgesetzes zu:

$$\left(\frac{du}{dy}\right)'_W = \left(\frac{du}{dy}\right)_W \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{1/4}.$$

Durch Vergleich mit der obigen Rechnung für $\sigma = 1$ erkennt man, daß man den Wert $\frac{\alpha d}{\lambda_W}$ jetzt erhält, wenn man den obigen mit $\frac{1}{\sigma}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{1/4}$ multipliziert.

Also:

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = \frac{\psi}{4} \cdot \frac{\varrho \bar{u} d}{\mu_W} \cdot \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{1/4}$$

oder mit Blasius' Wert für ψ:

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = 0{,}0395 \frac{\bar{u}^{-1/4} d^{-1/4} \varrho^{-1/4}}{\mu^{-1/4}} \cdot \frac{\varrho \bar{u} d}{\mu_W} \cdot \frac{c_W \mu_W}{\lambda_W} \cdot \frac{\lambda_W^{1/4}}{c_W^{1/4}} \cdot \frac{1}{\mu^{1/4}}$$

oder

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = 0{,}0395 \left(\frac{\bar{u} d \varrho c_W}{\lambda_W}\right)^{3/4} \qquad (2)$$

Wir schreiben daneben die Nusseltsche empirische Gleichung:

$$\frac{\alpha d}{\lambda_W} = 0{,}0292 \left(\frac{\bar{u} d \varrho \bar{c}}{\lambda_W}\right)^{0{,}786\,2)}$$

und erkennen die weitgehende Verwandtschaft.

1) Über die strengere Fassung hierzu vgl. die Arbeit von Prandtl, l. c.

1) Die Temperaturverteilung der fiktiven Flüssigkeit stimmt sowohl in der Kernströmung, als auch in der laminaren Grenzschicht mit der der wirklichen überein. Dagegen kann in der Übergangszone eine gewisse Abweichung sein, die auch den Wert $\bar{T}$ etwas beeinflussen kann. In diesem Punkt ist die Theorie als Näherung zu werten.

2) Die Nusseltsche Gleichung ist hier zwecks besseren Vergleichs der unsrigen angepaßt worden. Insbesondere ist im Nenner λ_W statt $\bar{\lambda}$ bei Nusselt gesetzt. Das hat zur Folge, daß sich der Zahlfaktor gegen den bei Nusselt nicht unbeträchtlich ändert. Auch gilt die Gleichung so, wie die Nusseltsche Gleichung an sich, zunächst nur für die Verhältnisse der Nusseltschen Versuche, während unsere Gleichung allgemeine Gültigkeit beansprucht.

Ein Vorzug unserer theoretischen Ableitung liegt darin, daß die Indizes für die Stoffwerte ganz klar herauskommen, was bisher nicht der Fall war[1]).

Eine Übereinstimmung unserer Gleichung (2) mit dem Experiment wird man natürlich nur erwarten können, wenn die der Ableitung zugrunde liegenden Bedingungen annähernd erfüllt sind. Das ist hier in erster Linie genügende Anlauflänge bis zur Meßstelle, so daß die Gültigkeit des Blasiusschen Gesetzes gewährleistet ist. Wie

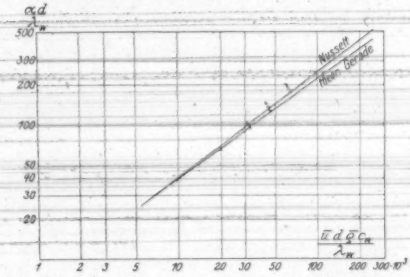


Fig. 1.

unsere mit heißem Wasser angestellten Versuche zeigen, ist diese benötigte Anlauflänge sehr erheblich, was jedoch nicht weiter wundernehmen darf, da die starken thermischen Störungen, die aus dem Kessel mitkommen, natürlich auch erhebliche Zeit zum Abklingen brauchen. Wir werden also in dem Wert der Gleichung (2) einen unteren Grenzwert für große Anlauflängen zu sehen haben, Anlauflängen, die um so größer ausfallen müssen, je höher die Kesseltemperaturen liegen.

Mit dieser Überlegung durchaus in Übereinstimmung sind unsere Versuchsergebnisse[2]), von denen einige in Fig. 1 wiedergegeben sind. Die Meßstelle lag bei einer Anlauflänge von 400 Durchmessern. In jeder Gruppe von Versuchspunkten gehört der unterste, der theoretischen Kurve nächstliegende, zur tiefsten Kesseltemperatur von 69,2°, die nach oben zu folgenden zu 85,5°, 101,8° und 118,0°. Daß die Nusseltsche Kurve über unserer liegt, rührt daher, daß seine Versuchsdaten Mittelwerte über Strecken bedeuten, die ins Anlaufgebiet hineinragen. Wie sich die Versuchspunkte mit zunehmender Anlauflänge dem theoretischen Wert nähern, erkennt man gut aus Fig. 2, deren Kurvenverlauf erwarten läßt, daß auch für die höheren Kesseltemperaturen bei entsprechend höherer Anlauflänge theoretische und experimentelle Werte zusammenfallen[1]).

Unsere Ableitung läßt sich natürlich auch auf jedes andere Widerstandsgesetz, damit vielleicht

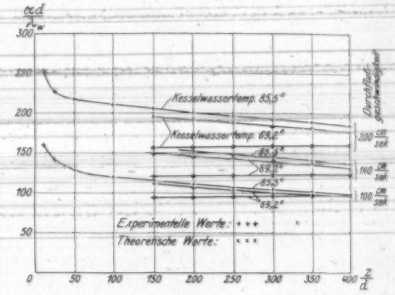


Fig. 2.

näherungsweise auch auf den Anlauf, anwenden. Versuche mit einem rauhen Rohr, d. h. quadratischem Widerstandsgesetz[2]), sind zur Zeit im Gang und versprechen auch zufriedenstellende Resultate betr. Übereinstimmung mit der Theorie.

Unsere Versuche erfuhren weitgehende Förderung durch die Helmholtzgesellschaft, der auch an dieser Stelle hierfür der beste Dank ausgesprochen sei.

1) Vgl. hierüber Nusselt in der Festschrift zur Hundertjahrfeier der Technischen Hochschule Karlsruhe 1925: Die Wärmeübertragung an Wasser im Rohr.

2) Die ausführlichere Darstellung der Versuche und ihrer Ergebnisse wird in der Dissertation von Burbach erfolgen, in der auch Vergleiche mit den anderen bekannten Formeln gegeben werden.

1) Die theoretische Kurve verliert natürlich bei den kleineren Anlauflängen ihre Bedeutung, da, wie entsprechende Messungen ergaben, dort das Blasiussche Gesetz nicht mehr gilt. Sie ist dort nur gezeichnet, um die Annäherung der experimentellen Kurve an den theoretischen Wert deutlich zu machen.

2) In diesem Fall kommt man zu der Gleichung: $\frac{\alpha d}{\lambda_W} = \frac{\psi}{4} \frac{u\, d_Q\, c_W}{\lambda_W}$ und damit zu Übereinstimmung mit Prandtls Theorie für sehr starke Turbulenz.

Leipzig, Abteilung für angewandte Mechanik und Thermodynamik des Physikalischen Instituts, 6. April 1928.

(Eingegangen 18. April 1928.)

Demonstration des Doppler-Effekts in der Akustik.

Von J. Zenneck.

Ein einfaches und wirkungsvolles Verfahren, dessen Prinzip nicht neu ist, ist folgendes.

Ein Lautsprecher L (Fig. 1) wird an ein Flacheisen (E_1 E_2) angeschraubt und mit seinen Zuleitungen an der Decke des Hörsaals aufgehängt. Man läßt den Lautsprecher senkrecht zu einer nicht zu weit entfernten Wand (W) des Hörsaals hin- und herpendeln. Beschickt man den Lautsprecher mit Wechselstrom (z. B. von der Frequenz 1000/sec), so bekommt der Zuhörer stets zwei Schallwellen, eine direkte vom Lautsprecher und eine an der Wand reflektierte. Während der Pendelung des Lautsprechers haben diese beiden Wellen Frequenzen, die von der Ruhfrequenz des Lautsprechers verschieden sind, und zwar besitzt bei der Bewegung des Lautsprechers auf den Zuhörer zu und von der Wand weg die direkte Welle eine höhere, die reflektierte Welle eine niedrigere Frequenz, als bei ruhendem Lautsprecher. Der Zuhörer muß also Schwebungen hören. Sie sind am raschesten in den Zeiten, in denen der Lautsprecher in der Nähe seiner Gleichgewichtslage sich befindet und also ein Maximum seiner Geschwindigkeit besitzt. Durch Änderung der Amplitude der Pendelung läßt sich die Frequenz der Schwebungen in weiten Grenzen variieren.

In Fig. 2[1]) ist das Schallbild, das der Zuhörer erhält, oszillographisch bei einer Frequenz von 1000/sec aufgenommen (Reißmikrophon, Verstärker mit Widerstandskopplung, Siemensscher Oszillograph); Fig. 3 dasselbe bei größerer Amplitude der Pendelungen. Die geringe Un-

1) Für die Ausführung der Aufnahmen bin ich den Herren Diplomingenieuren Kuntze und Linck zu Dank verpflichtet. — Die Zeitmarken bedeuten 1/32 Sekunden.

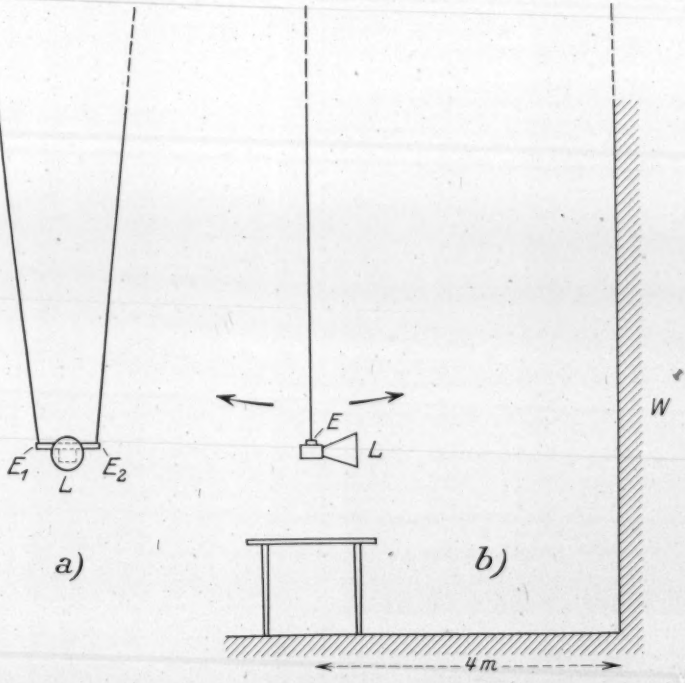


Fig. 1.

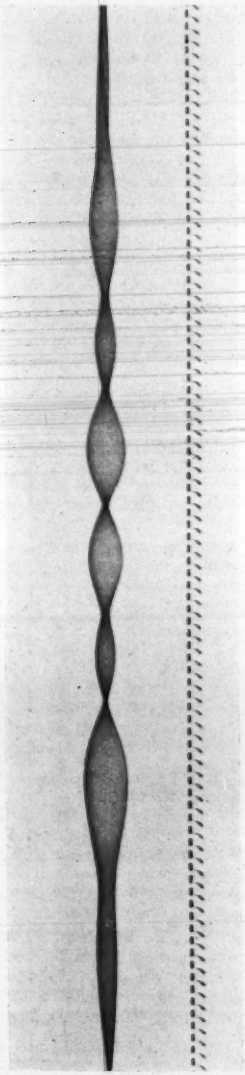


Fig. 3.

symmetrie rührt davon her, daß der Lautsprecher in einem Umkehrpunkt sich viel näher beim Aufnahmemikrophon befindet, als im anderen.

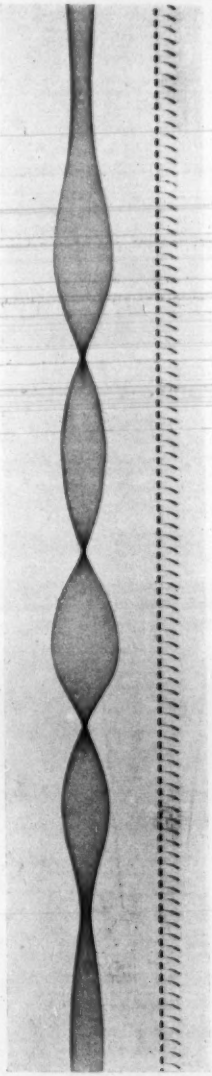


Fig. 2.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 27. April 1928.)

Zur Abbildung bei der Projektion von Diapositiven.

Von J. Zenneck.

Bei der Abbildung von Diapositiven, die durch einen Kondensor beleuchtet werden, gehen bekanntlich die Strahlen, die ein bestimmtes Flächenelement des Diapositivs (D) durchsetzen, durch ein ganz bestimmtes Flächenelement des Objektivs (P) hindurch (Fig. 1). Bildet man

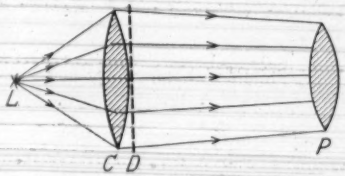


Fig. 1.

dagegen ein selbstleuchtendes oder diffus reflektierendes Objekt ab, so treffen die Strahlen, die von einem bestimmten Flächenelement des Objekts ausgehen, auf alle Oberflächenelemente des Objekts auf (Fig. 2). Die optische Be-

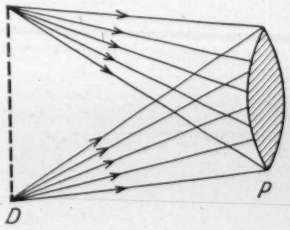


Fig. 2.

anspruchung des Objekts und die Bedingungen, denen es für eine gute Abbildung zu genügen hat, sind also in den beiden Fällen ganz verschieden. Sie sind bei der Projektion von Diapositiven mit Kondensor auch noch verschieden, je nachdem man die Lichtquelle so einstellt, daß die

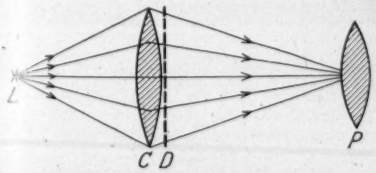


Fig. 3.

Strahlen vom Kondensor ungefähr in der Mitte des Objektivs vereinigt werden (Fig. 3, normale

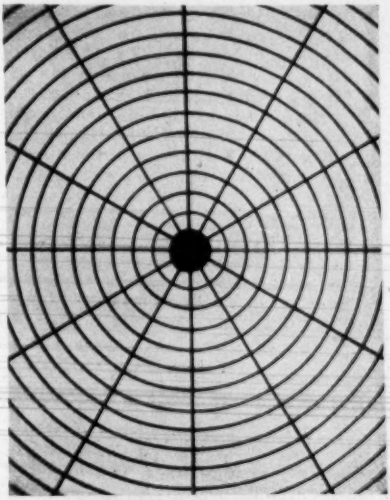


Fig. 4.

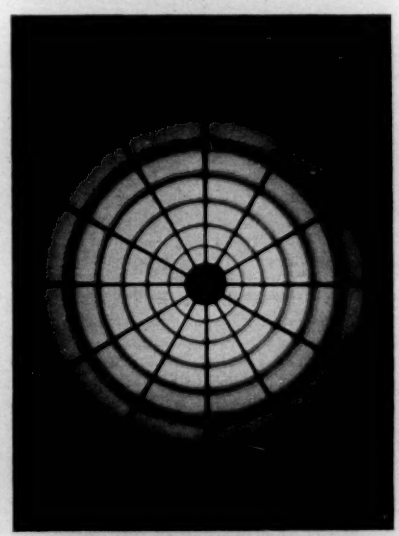


Fig. 5.

Einstellung) oder so, daß sie das ganze Objektiv erfüllen (Fig. 1). Bei der normalen Einstellung von Fig. 3 wird nur ein ganz kleiner Teil des Objektivs zur Abbildung herangezogen.

Diese Verhältnisse lassen sich einfach demonstrieren, wenn man dasselbe Diapositiv bei genau derselben Stellung von Diapositiv und Objektiv projiziert und zwar 1. bei der Einstellung von Fig. 3 — ein solches Bild

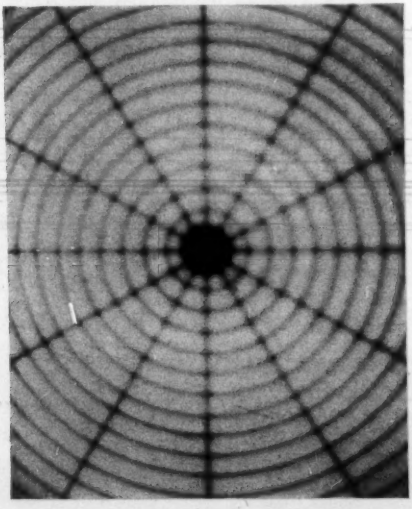


Fig. 6.

ist Fig. 4 —; 2. bei der Einstellung von Fig. 1 — ein Beispiel dafür ist Fig. 5 — und endlich 3. bei der Einstellung von Fig. 3 oder auch Fig. 1, aber nachdem man die dem Kondensor zugekehrte Seite des Diapositivs mit einem mäßig durchlässigen Pauspapier oder mattem Überfangglas belegt hat. In diesem Falle ergab sich das in seiner ganzen Fläche völlig unscharfe verschleierte Bild (Fig. 6). Die Hinterlegung des Diapositivs mit Pauspapier oder Überfangglas hat zur Folge, daß die Strahlen, die vom Kondensor auf das Pauspapier bzw. Überfangglas gelangen, von dort ziemlich gleichmäßig nach allen Seiten zerstreut werden und demnach wesentlich in derselben Weise weiter verlaufen, wie wenn das Diapositiv ein selbstleuchtendes bzw. diffus reflektierendes Objekt wäre.

Bei den Aufnahmen (Fig. 4—6[1])) wurde als Projektionsobjektiv (*P*) eine Doppellinse, wie man sie für Kondensoren verwendet, benützt. Projiziert man in entsprechender Weise mit einem für das Plattenformat korrigierten Anastigmaten, so unterscheiden sich die 3 Bilder nicht merklich voneinander.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 27. April 1928.)

1) Für die Anfertigung der Aufnahmen bin ich Herrn Assistent Wisshak zu Dank verpflichtet.

Zur Demonstration gekrümmter Lichtstrahlen.

Von. J. Zenneck.

Unter den Methoden zur Demonstration der Krümmung von Lichtstrahlen in einem geschichteten Medium verwende ich seit mehreren Jahren die folgende. In einem Leyboldschen Gefäß (bei meinen Versuchen Grundfläche: 5×10 cm^2, Höhe: 10 cm) wird in üblicher Weise eine nahezu konzentrierte Kochsalzlösung und Wasser übereinander geschichtet. Man hat dann unten Kochsalzlösung, oben Wasser und dazwischen eine Diffusionsschicht, in der die optischen Konstanten der Kochsalzlösung in horizontalen Schichten allmählich in diejenigen des Wassers übergehen.

Stellt man ein solches Gefäß vor eine von der Rückseite beleuchtete Mattglasplatte, so erscheint es vollkommen gleichmäßig hell (vgl. die photographische Aufnahme Fig. 1[1])). Bringt

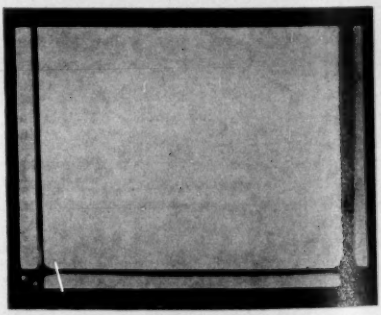


Fig. 1.

man das Gefäß aber vor den Kondensor einer Projektionslampe und projiziert man dasselbe mit einem Projektionsobjektiv, so erhält man

1) Für die Anfertigung der Aufnahmen bin ich Herrn Assistent Wisshak zu Dank verpflichtet.

überraschenderweise ein Bild von der Form der Fig. 2[1]) (geringe Diffusion) oder Fig. 3[1]) (stark

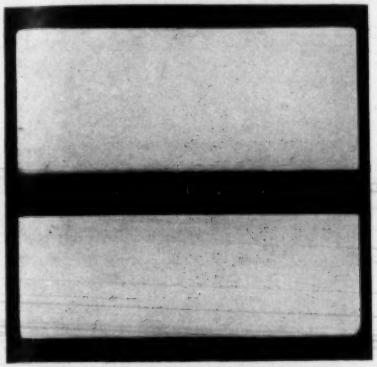


Fig. 2.

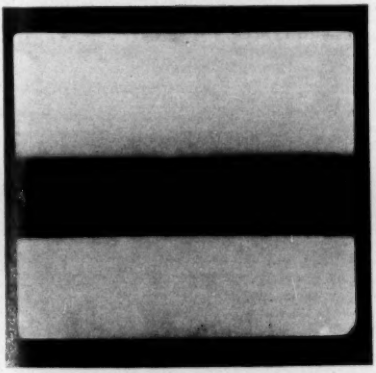


Fig. 3.

fortgeschrittene Diffusion): die Diffusionsschicht erscheint dunkel. Die vom Kondensor kommenden Strahlen treffen die Diffusionsschicht in ungefähr horizontaler Richtung und werden von ihr so stark nach unten gekrümmt, daß sie überhaupt nicht ins Projektionsobjektiv gelangen.

1) Für die Anfertigung der Aufnahmen bin ich Herrn Assistent Wisshak zu Dank verpflichtet.

München, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 27. April 1928.)

Über eine einfache Vorrichtung zur Messung hoher elektrischer Potentiale.

Von H. Dember.

§ 1. Auf jedes Flächenelement eines elektrisch geladenen Körpers wirkt eine nach außen gerichtete Kraft, die vom Potential abhängt. Ist σ die Flächendichte der Elektrizität auf dem Leiter, so ist, wenn die Dielektrizitätskonstante der Umgebung gleich eins gesetzt wird, die nach außen gerichtete Kraft $p = 2\pi\sigma^2$. Die elastischen Kräfte des Materials halten dieser Kraft das Gleichgewicht. Bei einem Kugelkondensator, dessen innere Kugel den Radius r, dessen äußere den Radius R hat, ist

$$p = \frac{1}{8\pi} \cdot \frac{R^2}{(R-r)^2} \cdot \frac{V^2}{r^2}, \qquad (1)$$

wobei V das Potential bedeutet. Dieser Druck p wird bei einem bekannten Seifenblasenversuch durch Vergrößerung des Volumens sichtbar gemacht und ist auch manometrisch meßbar.

Ersetzt man einen Teil der Oberfläche der inneren Kugel des Kondensators durch eine feine leitende und elastische Membran, so gibt diese gerade wie die Haut der Seifenblase den elektrischen Kräften nach. Die bewirkte Ausbiegung kann als Maß für das Potential des Leiters benutzt werden.

§ 2. Für eine längs des Randes eingespannte und gleichmäßig belastete, kreisrunde Membran vom Radius a gilt[1]), wenn φ der Winkel ist, den die Tangente gegen die Ausgangslage an der Stelle x bildet und x von der Mitte aus gerechnet wird

$$\varphi = \frac{N}{8}(a^2 x - x^3).$$

Hierin ist

$$N = \frac{3(m^2-1)\cdot p}{4 m^2 E d^3},$$

p bedeutet den Druck, m die Poissonsche Zahl ($\sim 10/3$), E den Elastizitätsmodul und d die Membrandicke. φ hat eine Maximum Φ im Wendepunkt bei $x_4 = 0{,}577 \cdot a$. Wird für p der Wert aus Gleichung (1) eingesetzt, so gilt

$$\Phi = 0{,}00144 \frac{m^2-1}{m^2} \cdot \frac{a^3}{E \cdot d^3 \cdot r^2} \cdot \frac{R^2}{(R-r)^2} \cdot V^2.$$

Diese Abhängigkeit wurde durch den folgenden Versuch geprüft.

§ 3. Die Messingkugel K von 2 cm Durchmesser (s. Fig. 1) ist bei B mit einer Bohrung von 6 mm versehen und das Loch durch eine Müllersche Nickelmembran von $1/20000$ mm Dicke verschlossen. Die Bohrung selbst wurde verlängert und bei A durch den Halter der Kugel

1) H. Hencky, Z. S. f. J. Mathematik u. Physik 63, 311, 1915.

nach außen geführt, damit nicht Druck- und Temperaturschwankungen der Luft eine Ausbiegung der Membran hervorbringen konnten. Zur Beobachtung der Membranausbiegung diente ein dünner Glasspiegel Sp von 2 mm Durchmesser der auf der Membran aufgeklebt war. Um den maximalen Ausschlag messen zu können, war der Spiegel in etwa $0{,}6\,a$ vom Mittelpunkt der

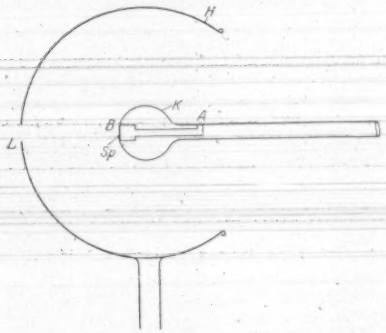


Fig. 1.

Membran angebracht. Die Bewegung des Spiegels wurde mit Fernrohr und Skala beobachtet[1]).

Als Spannungsquelle diente eine 60 plattige Toeplersche Influenzmaschine, zu deren Polen ein Grayscher Spitzenregulator, eine große Leidener Flasche und eine Kugelfunkenstrecke parallel geschaltet waren. Zur Definition des Feldes und zum elektrostatischen Schutz war die Kugel K von einer geerdeten Hohlkugelkalotte H von 13 cm Radius umgeben. Die Hohlkugel hatte bei L eine Öffnung zur Beobachtung der Spiegelbewegung.

Tabelle I und Fig. 2 geben eine Messung wieder.

Fig. 2 zeigt die Abhängigkeit des Ausschlages von V^2. Die Abweichungen von der Geraden stammen wohl hauptsächlich aus der ungenauen

1) Ich wurde darauf aufmerksam gemacht, daß A. Klemm, Arch. f. Elektrotechn. **12**, 553, 1923 die Ausbiegung einer Metallmembrane in einem Plattenkondensator benutzt hat. Dabei war der Spiegel mit der Membrane durch eine Hebeübertragung verbunden.

Tabelle I.

Potential	Ausschlag
4700 Volt	0,4 mm
8100 „	0,8 „
11400 „	1,2 „
14500 „	3,0 „
20400 „	5,1 „
26000 „	8,8 „
30800 „	12,5 „
32400 „	15,5 „

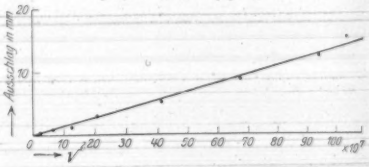


Fig. 2.

Messung der hier benutzten relativ niedrigen Spannungen mit der Funkenstrecke.

Wurde die Hohlkugel H entfernt, so daß sich die Kraftlinien des Feldes unregelmäßig verteilten und an den Geräten und Wänden des Laboratoriums endigten, so verlor sich die quadratische Abhängigkeit und ging in eine fast lineare über. Eine solche Messung mit stärkerer Membran zeigt Tabelle II.

Tabelle II.

Potential	Ausschlag
(4700 Volt	0,2 mm)
8100 „	0,5 „
11400 „	1,1 „
14500 „	1,5 „
17500 „	2,1 „
20400 „	2,5 „
23200 „	2,7 „
26000 „	3,0 „
28600 „	3,5 „
30800 „	3,7 „
32400 „	3,8 „
35900 „	4,0 „
39000 „	4,75 „

Dresden, Physikalisches Institut d. Techn. Hochschule, März 1928.

(Eingegangen 13. April 1928.)

BESPRECHUNGEN.

P. Boutroux, Das Wissenschaftsideal der Mathematiker. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von H. Pollaczek-Geiringer. (Sammlung „Wissenschaft und Hypothese" Bd. XXVIII.) Kl. 8°. 253 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. Geb. M. 11.—.

Der Verfasser hat eine Geschichte der Mathematik in philosophischer Absicht geschrieben. Aus ihrer Geschichte will er das Wesen der Mathematik

erkennen: „Man kann nicht hoffen", meint er, „die wesentlichen Züge wissenschaftlicher Erkenntnis zu erfassen, wenn man nicht weiß, wie diese Erkenntnis erworben wurde; man kann die Theorien der Gelehrten nicht beurteilen, ohne vorher die Gedankengänge verstanden zu haben, denen sie entsprungen sind, und die weiteren, denen sie ihren Ausbau verdanken" (S. 1). Was den Verfasser speziell interessiert, sind nicht die Detailtatsachen der Geschichte, sondern ihre Leitmotive. Er zitiert ein Wort von E. Picard: „Der Mann der Wissenschaft braucht, um sich aufrecht zu halten, bestimmte Überzeugungen; er braucht gewissermaßen ein wissenschaftliches credo". Dieses credo oder, wie Boutroux es nennt, das Wissenschaftsideal der Mathematiker sucht er zu ergründen.

Die Geschichte der Mathematik beginnt für ihn mit den Griechen: „Die Ägypter kannten wohl schon mathematische Tatsachen, sie verstanden Formeln zu handhaben, geometrische Figuren zu studieren; aber da sie, soweit wir das heute beurteilen können, utilitaristische und praktische Ziele verfolgten, scheinen sie keinen deutlichen Begriff von einer abstrakten Wissenschaft, kein wissenschaftliches Ideal gehabt zu haben" (S. 24). Im Gegensatz hierzu hatten die Griechen, wie Boutroux hervorhebt, „alle Brücken zwischen der spekulativen und der angewandten Wissenschaft abgebrochen. Diese großartige Intransigenz, die zunächst zu einer Blüte der Wissenschaft geführt hatte, indem sie sie vor jeder unlauteren Berührung bewahrte, wurde im Verlaufe der Entwicklung das Moment, das jeden Fortschritt der Wissenschaft aufhielt" (S. 57). Ihr „ästhetisierender Charakter" insbesondere wurde ihr zum Verhängnis.

Bei den Griechen war die Mathematik eine „kontemplative Wissenschaft", die sich auf Feststellungen beschränkt. „Mit der Ausbreitung der Algebra jedoch erfolgt eine Revolution. Die Wissenschaft, die vorher beobachtet hat, wird nun konstruktiv. Von den einfachen Elementen ausgehend, immer kompliziertere Verbindungen zusammenzustellen und aus allen Teilen so durch eigenen Fleiß das Gebäude der Wissenschaft aufzubauen, das schien von nun an die Aufgabe des Mathematikers" (S. 161). Es ist die „synthetische Auffassung der Mathematik", die — seit Descartes — die kontemplative Auffassung der Griechen verdrängt. Aber, wie Boutroux ausführt, „gerade die Fortschritte der algebraischen Mathematik mußten gewisse Schwierigkeiten heraufbeschwören und eine Reaktion herbeiführen. Der moderne Mathematiker ist erschreckt, weil er seine allzu große Schöpfergewalt erkennt: da er die Möglichkeit hat, eine Unendlichkeit von Theorien aufzubauen, sich nach unendlich vielen Richtungen zu wenden, weiß er nicht, was er wählen soll. Aber er ist andererseits auch dadurch in Verlegenheit, daß die Begriffe und Eigenschaften, die er studiert, seinen Bemühungen Widerstand entgegensetzen, sich ihm nur unvollkommen offenbaren; er fühlt, daß diese Begriffe nicht ganz und gar seine Schöpfung sind; er kann nicht mehr, gleich dem Algebraiker des 18. Jahrhunderts, die Wissenschaft als reines und einfaches Ergebnis seiner Konstruktionen ansehen" (S. 171).

Wir rühren hier an ein philosophisches Problem, das der Verfasser in dem Kapitel über „die Gegenständlichkeit der mathematischen Tatsachen" behandelt. Er erinnert zunächst an die Ansicht von Henri Poincaré, wonach „der größte Teil unserer Theorien letzten Endes durch Betrachtungen empirischen Ursprungs bestimmt ist". Doch ist dies — nach Ansicht von Boutroux — „nicht eine fundamentale Notwendigkeit, sondern bloß die Folge mehr zufälliger Motive. Um nämlich eine Mathematik zu schaffen, die auf das Studium des Physischen anwendbar ist, müssen wir unter den unendlich vielen Systemen theoretisch möglicher Postulate eine Auswahl treffen, und unsere Wahl ist geleitet durch die Erfahrung unserer Sinne; aber man kann deshalb nicht sagen, daß dieses Wählen als solches den Postulaten und Begriffen unserer Wissenschaft irgendwie den Charakter der Gegenständlichkeit aufdrückte" (S. 176). Dieser Charakter der Gegenständlichkeit ergibt sich vielmehr — nach Boutroux — auf folgende Weise: „Um uns des Widerstandes bewußt zu werden, den die mathematische Materie dem Willen des Gelehrten entgegensetzt, müssen wir die Existenz mathematischer Tatsachen voraussetzen, die von der wissenschaftlichen Konstruktion unabhängig sind; wir müssen den mathematischen Begriffen eine tatsächliche Gegenständlichkeit beilegen: eine Gegenständlichkeit, die wir innere (intrinsèque) nennen wollen, um anzudeuten, daß sie nicht zu verwechseln ist mit jener Objektivität, die sich auf die experimentelle Erkenntnis bezieht" (S. 181).

Man kann den Boutrouxschen Gegenständlichkeitsbegriff akzeptieren und wird doch die Unterscheidung von mathematischer und experimenteller Gegenständlichkeit ablehnen müssen. Worin besteht beispielsweise nach Boutroux die Gegenständlichkeit eines Dreiecks? Ich habe es selbst aus drei Seiten zusammengefügt, es ist gewissermaßen mein Geschöpf und doch bin ich nicht imstande, alle möglichen, dieses Dreieck betreffenden Fragen zu beantworten, ohne mir den Kopf zu zerbrechen oder, wie Boutroux sagt, einen gewissen „Widerstand" zu überwinden. Genau das Gleiche gilt aber von den physischen Dingen und Tatsachen. Wenn ich ein Experiment mache, so bin ich auch quasi der Schöpfer der von mir aufgebauten Versuchsanordnung und doch ist der Ablauf des Versuchs meinem Willen nicht unterworfen. Die Gegenständlichkeit der experimentellen Tatsachen ist, wie man sieht, von der gleichen Art wie die Gegenständlichkeit der mathematischen Tatsachen.

Die vorliegende deutsche Ausgabe ist von der Herausgeberin mit wertvollen Erläuterungen versehen worden. Daß die Übersetzung dem Original an Eleganz nicht nachsteht, wird man aus den mitgeteilten Proben unschwer erkennen.

Dr. Heinrich Löwy.

E. Gehrcke, Handbuch der physikalischen Optik. Bd. 2. 4^0. 1104 S. Mit 368 Abb. im Text und 3 Tafeln. Leipzig. J. A. Barth. 1928. M. 107.—, geb. M. 111.—.

Es ist in diesem zweiten abschließenden Band des Gehrckeschen Handbuches in 21 Kapiteln ein Material von fast erdrückender Ausdehnung besprochen, in dem sich zurechtzufinden nicht ganz leicht wäre, wenn nicht ein mit großer Gründlichkeit bearbeitetes Stichwörterverzeichnis (im Umfang von 40 dreispaltigen Seiten!) und ein Namenverzeichnis zu Hilfe kämen. Denn man findet in vielen Fällen Aufschluß über eine bestimmte Frage an einer ganzen Reihe von Stellen; so ist, um ein Beispiel zu nennen, die Feinstruktur der Spektrallinien behandelt in vier verschiedenen Kapiteln. Diese (scheinbare) Zersplitterung hat ihren Grund natürlich darin, daß sich manche Fragen heute eben nicht mehr abschließend nur von einer einzigen Seite her betrachten lassen und es ist sicher leichter, eine straffere Disposition als wünschenswert zu bezeichnen, als bestimmte Vorschläge zu bringen und es selbst besser zu machen.

Wenn auch die einzelnen Kapitel durchaus nicht gleichwertig sind, wenn man dieses oder jenes vermißt und sogar verschiedentlich augenscheinliche Versehen feststellen muß, würde man doch der außerordentlichen Mühe und Arbeit, die der Herausgeber und die Mitarbeiter in das Werk gesteckt haben, nicht gerecht werden durch eine Betonung der Mängel zuungunsten der Vorzüge. Denn die an ein Handbuch in erster Linie zu stellenden Forderungen — objektive, kritische und möglichst vollständige Darstellung des Stoffes — erfüllt die überwiegende Mehrzahl der Artikel dieses Bandes, und zwar recht vollkommen, zum Teil vorzüglich. Die Leistungen der vielen Mitarbeiter im einzelnen zu würdigen, ist hier nicht möglich. Ohne damit andere Abschnitte zurücksetzen zu wollen, sei hier etwa hingewiesen auf die Behandlung der Phosphoreszenz und Fluoreszenz, der Bandenspektren, der Röntgenspektren, des Zeemaneffekts, des Starkeffekts oder der selektiven Temperaturstrahlung. Aus dem Rahmen fallen eigentlich nur zwei heraus. In dem Abschnitt über Spektralanalyse hat sich Einsporn die Sache entschieden zu leicht gemacht. Es konnte hier natürlich eine auch nur einigermaßen vollständige Wiedergabe des gesamten Materials nicht in Frage kommen, es finden sich Ergänzungen des Themas in anderen Teilen des Handbuches und in dem Handbuch der geometrischen Optik, aber der Einspornsche Artikel ist in seiner unsystematischen Vermengung von Wesentlichem und Unwesentlichem wenig befriedigend. Der zweite Beitrag, an dem generell Kritik geübt werden kann, ist der von Mohorovičič über die Optik bewegter Körper. Ohne Zweifel enthält dieser Artikel Interessantes und Originelles und gibt namentlich in den Fußnoten viele anregende Literaturhinweise. Die Bearbeitung eines Gebietes, das die Gemüter so sehr bewegt hat, auf dem nicht nur Tatsachen, sondern auch philosophische Meinungen mitsprechen, einem ausgesprochen extrem der einen Richtung angehörenden Forscher anzuvertrauen, ist aber ein gefährlicher Versuch, dessen Erfolg auszuprobieren gerade ein Handbuch nicht der richtige Ort ist; apodiktische Werturteile fordern stets Widerspruch heraus.

Über den reichen Inhalt des Bandes möge die folgende Übersicht orientieren. 1. Chemische Wirkungen des Lichts, von K. F. Bonhoeffer (18 S.). 2. Die Bromsilberplatte, von W. Meidinger (38 S.). 3. Technische Reproduktionsverfahren, von O. Mente (30 S.). 4. Farbenphotographie, von E. Lehmann (12 S.). 5. Spektralanalyse, von E. Einsporn (84 S.). 6. Die Feinstruktur der Spektrallinien, von G. Hansen (45 S.). 7. Phosphoreszenz, Fluoreszenz und chemisches Reaktionsleuchten, von R. Tomaschek (128 S.). 8. Anregungsspannungen von Spektrallinien und Ionisierungsspannungen, von E. Einsporn (25 S.). 9. Seriengesetze der Linienspektren, von K. W. Meissner (34 S.). 10. Bandenspektra, von W. Mörikofer (38 S.). 11. Röntgenspektren, von O. Berg (88 S.). 12. Gamma-Strahlen, von W. Kohlhörster (40 S.). 13. Magnetische Zerlegung der Spektrallinien von P. Zeeman u. T. L. de Bruin (92 S.). 14. Starkeffekt, von W. Steubing (54 S.). 15. Atomtheorien von H. Cremer (72 S.). 16. Allgemeine Grundlagen der Temperaturstrahlung, von F. Schröder (26 S.). 17. Strahlung des schwarzen Körpers, von E. Gehrcke (32 S.). 18. Selektive Temperaturstrahlung, von F. Schröter (50 S.). Technische Lichtquellen, von F. Skaupy (10 S.). 20. Optik bewegter Körper, von S. Mohorovičič (97 S.). 21. Natur des Lichtes, von W. Noddack (19 S.). Der Druck und die Figuren, vor allem auch die Wiedergabe von photographischen Aufnahmen, sind vorzüglich. R. Seeliger.

A. S. Eddington, Der innere Aufbau der Sterne. Nach Ergänzung der englischen Ausgabe durch Prof. A. S. Eddington ins Deutsche übertragen von Dr. E. von der Pahlen. Gr. 8°. VIII u. 514 S. Mit 5 Abb. Berlin, J. Springer. 1928. M. 28.—, geb. M. 30.—.

Zu den meisterhaften Lehrbüchern von A. S. Eddington über das Sternsystem und die Relativitätstheorie ist 1926 ein neues über den inneren Aufbau der Sterne gekommen, das nun mit Ergänzungen versehen in deutscher Ausgabe vorliegt. Der Verf. stellt hier ein Gebiet dar, an dessen Entwicklung er selbst den stärksten Anteil hat, und auch das vorliegende Buch gibt nicht nur eine zusammenfassende Bearbeitung der bisherigen Ergebnisse von mustergültiger Geschlossenheit, sondern führt die Probleme zum Teil über den Stand der vorhergehenden Arbeiten hinaus.

Das Buch beginnt mit einem einleitenden Kapitel „Überblick über das Problem", das die denkbar beste Orientierung über die behandelten Fragen gibt. Thermodynamik der Strahlung und Quantentheorie sind dann als Vorbereitung zur eigentlichen Aufgabe, dem theoretischen Aufbau des Sternes, kurz dargestellt. Das Buch knüpft zunächst an die Gedankengänge von Emdens „Gaskugeln" an; allein aus den Überlegungen der klassischen Thermodynamik heraus werden (polytrope) Gaskugeln im Gleichgewichtszustand aufgebaut und mit der Wirklichkeit verglichen. Um zu einer Übereinstimmung mit dieser zu kommen, bedarf es jedoch einer wesentlichen Modifikation der ursprünglichen Theorie. An Stelle des konvektiven Gleichgewichts tritt das Strahlungsgleichgewicht. Die Energieübertragung von innen nach außen erfolgt allein auf dem Weg der Strahlung, und jedes Volumenelement emittiert ebensoviel Energie als es absorbiert. Die Einführung der Strahlung als wesentlichen Faktor beim Aufbau eines Sternes zwingt zugleich zur Einführung des Strahlungsdruckes, welcher der Gravitation entgegenwirkt. Da der Strahlungsdruck wiederum eine Funktion der Temperatur ist, so tritt diese zugleich mit Druck, Dichte und Gravitationspotential unmittelbar in das Problem ein. Ebenso erscheint nun der Absorptionskoeffizient als neue Größe in den Gleichungen für den Sternaufbau. Diese sind also wesentlich komplizierter als in der älteren Theorie. Betrachtet man aber einen aus einem idealen Gas aufgebauten Stern, nimmt also die Zustandsgleichung idealer Gase zu Hilfe, und nimmt noch eine Annahme über das Verhalten des Absorptionskoeffizienten hinzu, so gelingt es, die Temperatur wieder zu eliminieren und das Gleichungssystem auf einen speziellen Fall der polytropen Gaskugeln bei Emden zurückzuführen. Damit ist ein aus einem idealen Gas bestehender Stern erhalten, bei welchem in jedem Volumenelement Gleichgewicht des Energieaustausches durch Strahlung besteht, und bei welchem zugleich Gasdruck, Gravitation und Strahlungsdruck sich in mechanischem Gleichgewicht befinden.

Als wichtigste Folgerung der eingeführten Annahmen ergibt sich der Satz, daß die absolute Leuchtkraft eines solchen Sterns ausschließlich von seiner Masse abhängt. Diese „Massen-Helligkeitsbeziehung" für Sterne im idealen Gaszustand ist der Nachprüfung durch die Beobachtung

zugänglich, auf die Eddington besonders ausführlich eingeht. Hierbei zeigt sich, daß nicht nur die bisher als ideale Gassterne angenommenen Riesen die theoretisch hergeleitete Beziehung erfüllen, sondern auch die Zwergsterne. Die Materie der Sterne von der Dichte des Wassers und darüber verhält sich also in den Sternen wie ein vollkommenes Gas. Von hier aus bahnt sich auch ein Weg zum Verständnis von so hohen Dichten, wie wir sie bei den weißen Zwergen mit erheblicher Wahrscheinlichkeit annehmen müssen.

Die folgenden Kapitel des Buches von Eddington behandeln speziellere astronomische Fragen: veränderliche Sterne oder schließlich die diffuse Materie im Raum. Von erheblichem physikalischem Interesse sind aber noch die Kapitel über den Absorptionskoeffizienten im Sterninnern und dessen Vergleich mit den Laboratoriumsversuchen und vor allem über die Quelle der Sternenergie. Die verschiedenen Möglichkeiten, die als Quelle für die durch Strahlung fortwährend verlorengehende Energie in Frage kommen, werden eingehend durchdiskutiert. Als Energievorrat kommt allein die subatomare Energie der gesamten Sternmaterie in Frage, wenn wir auch gegenwärtig noch nicht entscheiden können, ob die ausgestrahlte Energie durch die Umwandlung der Elemente frei wird, oder ob eine vollständige Vernichtung der Materie eintritt. Ein besonderes Kapitel beschäftigt sich schließlich noch mit den äußeren Schichten der Sterne und den spektralen Erscheinungen der Sternatmosphäre.

Was das Studium des neuen Werkes so besonders anziehend macht, ist nicht allein die Fülle der verarbeiteten Probleme, sondern vor allem auch die überaus durchsichtige und kluge Art der Darstellung. Wie überzeugend ist die Behandlung der Entropie (S. 36), mit welch feinem Humor ist die strittige Frage nach dem Wesen der weißen Zwerge erörtert (S. 207); wie tief sind die Bemerkungen über den Unterschied des mathematischen und des physikalischen Schaffens (S. 127). Nur ein Forscher von der Bedeutung Eddingtons konnte uns diese Darstellung eines der wichtigsten und weittragendsten Gebiete der modernen Astronomie geben. A. Kopff.

Astronomischer Kalender. Herausgegeben von der Universitäts-Sternwarte zu Wien. 47. Jahrgang. 8°. 142 S. Wien und Leipzig. Carl Gerold's Sohn. 1928. Geb. M. 6.—, Sch. 9.60.

Neben zahlreichen, besonders dem Liebhaberastronomen willkommenen Angaben enthält der 47. Jahrgang zwei Abhandlungen: Radiozeitzeichen von J. Fuchs und Neue Asteroiden und Kometen von H. Krumpholz. Man ist erstaunt, in dem ersten der beiden Aufsätze längere Ausführungen über den Einfluß zu finden, den die durch die Bewegung gegen den Äther verursachte Lorentz-Kontraktion der Erde auf die Pendeluhren hat; der Verf. fügt sogar eine Korrektionstabelle für den Uhrstand bei. Die Ergebnisse von L. Courvoisier sind experimentell noch so wenig geklärt und beruhen auf teilweise so fehlerhaften theoretischen Überlegungen, daß man mit deren Verbreitung (selbst in der vom Verf. gewählten einschränkenden Form) doch vorsichtiger sein sollte.

A. Kopff.

Schmidt, E., Wärmestrahlung technischer Oberflächen bei gewöhnlicher Temperatur. (Beiheft 20 zum Gesundheits-Ingenieur.) 23 S. München u. Berlin, R. Oldenbourg. 1927. Geh. M. 3.60.

Der Verfasser hat, veranlaßt durch die Bedeutung, welche der Wärmeübertragung durch Strahlung in der Heiztechnik bereits für gewöhnliche Temperaturen zukommt, für eine Reihe technisch wichtiger Körper (Metalle mit blanken, polierten, bearbeiteten und oxydierten Oberflächen, Anstriche, Papier, Gips, Holz, Ziegelsteine, Porzellan) kritische Strahlungsmessungen durchgeführt. Seine Versuchsanordnung, bei der die Versuchskörper in einem Raum von etwa 25° C Lufttemperatur einem auf 10 gekühlten Hohlraum gegenübergestellt wurden und die Größe des Strahlungsaustausches zwischen dem Versuchskörper und den Wänden des gekühlten Hohlraums auf thermoelektrischem Wege gemessen wurde, hat teilweise für die Praxis überraschende Ergebnisse aufgedeckt. (Die Farbe eines Lackanstrichs ist auf die Ausstrahlung bei gewöhnlicher Temperatur von geringer Bedeutung; glasiertes Porzellan, Glas liefern im Gegensatz zu blanken polierten Metallen sehr hohe Strahlungswerte. Hauchdünne Ölschichten üben keinen wesentlichen Einfluß aus; Ölschichten von $^1/_5$ mm liefern jedoch schon das hohe Ausstrahlungsvermögen des Öls selbst. Eine über Anlauffarben hinausgehende Oxydierung oder ein Aufrauhen von Metallflächen führt zu starker Strahlungssteigerung.)

Vom physikalischen Gesichtspunkt interessanter und wichtiger sind die theoretischen und experimentellen Ergebnisse, welche der Verfasser hinsichtlich der Richtungsverteilung bei Metallstrahlung bekannt gibt. Es zeigt sich, daß das Lambertsche Cosinusgesetz hierfür nicht gültig ist, insofern bei Metallen die Strahlungsintensität in schräger Richtung größer ist als senkrecht zur Fläche, beispielsweise bei 75° gegen die Senkrechte schon doppelt so hoch wie die normal gerichtete Strahlung wird und erst in unmittelbarer Nähe des streifenden Einfalls wieder auf kleinere Werte zurückgeht. Andere theoretische Untersuchungen betreffen die Berechnung des Einflusses von Profilierungen auf die Ausstrahlung, sowie die Entwicklung einer Beziehung zwischen der Strahlung elektrisch nicht leitender Körper und ihres mittleren Brechungsexponenten, der zufolge man bei elektrischen Nichtleitern stets hohe Strahlungszahlen zu erwarten hätte. C. Müller.

P. Bommersheim, „Beiträge zur Lehre von Ding und Gesetz". (Wissenschaftliche Grundfragen, 8.) 8°. VIII u. 108 S. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1927. M. 5.60.

Verf. nimmt auf Grund eines „objektiven Idealismus" an, daß die mathematischen Gesetze objektive Voraussetzungen der Natur sind. Mit dieser dogmatischen Annahme weicht man natürlich gerade dem wichtigsten Problem „Wie ist physikalische Erkenntnis überhaupt möglich" aus. Verf. beschäftigt sich mit einer Analyse der Begriffe: Ding, Gesetz, Funktion, Kausalität, Atom. Die Methode besteht im wesentlichen in dichotomischen Begriffsunterscheidungen, die aber auf rein heuristischer Basis beruhen, und daher philosophisch wohl wenig Entscheidendes zu geben vermögen. Ich weiß nicht, ob die überaus zahlreichen Begriffsunterscheidungen (die häufig den Anschein einer gewissen Künstlichkeit erwecken), dem Physiker etwas zu bieten vermögen, zumal die

Ausdrucksweise sich einer etwas schwerfälligen Schulsprache zu bedienen strebt. Immerhin ist die allgemeine Tendenz einer Verknüpfung der physikalischen Begriffsbildungen mit den allgemeinen philosophischen Kategorien an sich durchaus zu billigen und zu begrüßen. H. Dingler.

Tagesereignisse.

Ferienkurse in Jena 1.—15. August 1928. Das Gesamtprogramm umfaßt 65 teils sechs-, teils zwölfstündige Kurse.

Die naturwissenschaftliche Abteilung ist in diesem Jahre wieder sehr reichhaltig und enthält folgende Kurse, die in den Instituten der Universität stattfinden und mit Demonstrationen verbunden sind. 1. Anleitung zu Experimenten für den Schulunterricht in der anorganischen Chemie. Dr. Brintzinger (6 Std.). 2. Anleitung zu Experimenten für den Schulunterricht in der organischen Chemie. Dr. Maurer. (6 Std.) 3. Die Biologie im botanischen Schulunterricht mit Anleitung zu pflanzenphysiologischen Schulexperimenten. Prof. Dr. Detmer. (12 Std.) 4. Die moderne Zoologie im Schulunterricht. Prof. Dr. Franz. (12 Std.) 5. Zoologische Mikroskopier- und Präparierübungen. Prof. Dr. Franz. (24 Std.) Populäre Astronomie. Prof. Dr. Knopf. (12 Std.) Zeit- und Ortsbestimmung mit praktischen Übungen. Prof. Dr. Knopf. (24 Std.) Bau- und Funktion des Gehirns. Prof. Dr. Noll. (6 Std.) Geologische Einführung in die Erdphysik. Prof. Dr. Sieberg. (12 Std.) Grundbegriffe der Bakteriologie in ihrer Bedeutung für Wohnungs- und Schulhygiene. Dr. Lehmann. (12 Std.) Physiologie und Chemie der Nahrung, der Verdauungen und des Körperhaushalts. Dr. Schliephake. (12 Std.) — Ferner ist ein Abendvortrag von Prof. v. Skramlik über „Sinnestäuschungen" und ein Besuch des Planetariums vorgesehen.

Das ausführliche Programm der diesjährigen Ferienkurse in Jena ist bereits erschienen und durch das Sekretariat, Frl. Cl. Blomeyer, Jena, Carl-Zeiß-Platz 3, kostenlos zu beziehen.

Preisausschreiben über einen Apparat zur Schnellbestimmung des Wassergehalts von Braunkohlen. In der letzten Zeit geht man in Braunkohlenbrikettfabriken mehr und mehr dazu über, die getrocknete Brikettierkohle auf Korngrößenanteile und deren Wassergehalt zu untersuchen. Ist erst durch Versuche der Mengenanteil der einzelnen Körnungen in der Brikettierkohle als einigermaßen gleichbleibend festgestellt, so kann durch die Wassergehaltsbestimmung einer einzigen Korngröße mit ziemlicher Sicherheit auf den Wassergehalt der übrigen Kornanteile geschlossen werden. So läßt sich die Trocknung genau überwachen und es können Unregelmäßigkeiten abgestellt werden. Um jedoch auf Grund der gefundenen Werte schnellstens in den Trocknungsprozeß eingreifen zu können, ist eine rasche Wassergehaltsbestimmung sehr erwünscht. Da die bisherigen Verfahren zu lange Zeit beanspruchen, haben sich der Deutsche Braunkohlen-Industrie-Verein, das mitteldeutsche, ostelbische und rheinische Braunkohlen-Syndikat dazu entschlossen, ein Preisausschreiben über einen Apparat zur Schnellbestimmung des Wassergehalts von Braunkohlen herauszugeben, dessen Bedingungen im Inseratenteil dieser Zeitschrift auf Seite III bekanntgemacht werden.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. F. London für Physik.

Ernannt: Der Privatdozent an der Universität Göttingen Dr. Alwin Walther zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Darmstadt, der Privatdozent für Chemie an der Universität München Dr. Robert Fricke zum a. o. Professor ebenda, der Privatdozent für Chemie an der Universität Würzburg Dr. Georg-Maria Schwab zum Konservator des Chemischen Laboratoriums des Staates in München, der ord. Professor an der Polytechnischen Lehranstalt in Kopenhagen Dr. H. Bohr zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Göttingen, der Privatdozent für angewandte Mathematik an der Universität Göttingen Dr. Ing. Max Schuler zum a. o. Professor ebenda, der a. o. Professor für Photochemie an der Universität Göttingen Dr. Alfred Coehn zum ord. Professor ebenda, der a. o. Professor der Chemie an der Universität Breslau Dr. Fritz Arndt zum ord. Professor daselbst, der Direktor am Wernerwerk der Siemens-Halske A.-G. in Berlin-Siemensstadt Dr. Ing. Georg Keinath zum Honorarprofessor in der Fakultät für Maschinenwirtschaft (insbesondere für elektrische Meßtechnik und ihre Anwendung) an der Technischen Hochschule in Berlin-Charlottenburg, der ord. Professor der Chemie an der Eidg. Techn. Hochschule Zürich Dr. Richard Kuhn zum Direktor des Chemischen Instituts am Kaiser-Wilhelm-Institut für medizinische Forschung in Heidelberg, der Direktor der Langbein-Pfanhauser Werke in Leipzig Dr. W. Pfanhauser zum Honorarprofessor für Elektrochemie an der Technischen Hochschule Braunschweig, die Privatdozenten an der deutschen Universität Prag Dr. Karl Ludwig Wagner (Physikalische Chemie) und Dr. Leo Wenzel (Geophysik mit besonderer Berücksichtigung der Meteorologie und Klimatologie) zu a. o. Professoren an der gleichen Hochschule, die a. o. Professoren an der deutschen Technischen Hochschule Prag Dr. Alfred Eckert (allgemeine und analytische Chemie) und Dr. Paul Funk (Mathematik) zu ord. Professoren ebenda, der a. o. Professor an der deutschen Universität Prag Dr. Ludwig Berwald zum ord. Professor der Mathematik an derselben Hochschule, der Privatdozent an der Universität Basel Dr. Alfred Schmid zum a. o. Professor für physikalische Chemie ebenda.

Berufen: Der ord. Professor für Physik, Geodäsie, Meteorologie und Klimatologie an der Landwirtschaftlichen Hochschule Hohenheim und Dozent für Meteorologie an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Albert Wigand zum ord. Professor für Meteorologie an der Universität Hamburg.

Ehrung: Fräulein Prof. Dr. Lise Meitner, wissenschaftliches Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für Chemie in Dahlem, hat gemeinsam mit der französischen Chemikerin Frau Prof. Ramart-Lucas von der „American Association to aid scientific research by women" den „Ellen-Richard-Research-Prize" zuerkannt bekommen. Der Preis beträgt 2000 Dollar.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule Braunschweig Geh. Hofrat Dr. Heinrich Weber, der ord. Professor der Chemie an der Columbia University in New York Thoms B. Freas.

Für die Schriftleitung verantwortlich Prof. Dr. F. Harms in Würzburg. — Verlag S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.